Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Weierstrass, von Helmholtz, Schroeter, Fuchs

von

L. Kronecker.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 109.

In vier Heften.

Mit einer Figurentafel.

Berlin, 1892.
Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 109.

Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale.

Erste Abhandlung.

(Von Herrn *K. Hensel.*)

Einleitung.

Obwohl die Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen durch die neueren Untersuchungen in hohem Masse ausgebildet worden ist, genügt sie doch in einem wesentlichen Punkte nicht den Anforderungen, welche nothwendig an sie gestellt werden müssen: Alle hier gegebenen Definitionen entbehren nämlich so lange einer sicheren Grundlage, als kein Mittel angegeben wird, durch welches entschieden werden kann, ob sie auf eine vorgelegte Grösse passen, oder nicht, und ebensowenig kann ein Satz als begründet gelten, wenn sein Beweis nicht so geführt ist, dass auch in jedem speciellen Falle seine Anwendbarkeit erkannt werden kann.

Die Nothwendigkeit und die Bedeutung dieser zuerst von Herrn *Kronecker* in seiner Festschrift allgemein aufgestellten Forderungen erkennt man gerade in der Theorie der algebraischen Functionen, mit welcher sich die vorliegende Arbeit beschäftigt, am deutlichsten, wenn man an die Behandlung der hier sich darbietenden Aufgaben geht und versucht, ob dieselben mit Benutzung von Methoden zu lösen sind, welche jenen Forderungen nicht entsprechen. Zu den Hauptzielen der allgemeinen Theorie der algebraischen Functionen gehört nun unstreitig die eingehende Untersuchung specieller Klassen algebraischer Gebilde. Nur auf dahin gerichtetem Wege kann diese Theorie eine so hohe Ausbildung erreichen, wie sie schon seit Anfang dieses Jahrhunderts die Theorie der algebraischen Zahlen er-

langt hat; nur so vermag sie die aus anderen Gebieten an sie herantretenden Fragen in befriedigender, inhaltsvoller Allgemeinheit zu beantworten. Für einen jeden Fortschritt in diesem Sinne müssten nun aber die vorher charakterisirten allgemeinen Untersuchungen durch vollständig neue ersetzt werden, um die dort nur *definirten* Anzahlen nunmehr wirklich zu bestimmen; ist dies aber geschehen, so wäre für dieses specielle Gebiet jene Theorie entbehrlich.

Aus diesen Gründen erscheint es von Wichtigkeit, dass die allgemeine Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen in einer Weise dargelegt werde, welche von den vorhin bezeichneten Mängeln frei ist, und insbesondere die allgemeinen Fragen so behandelt, dass die Resultate und Methoden unmittelbar auf jedes specielle algebraische Gebilde angewendet werden können. Soll dies der Fall sein, so darf die Untersuchung nur zu Functionen führen, welche sowohl in Bezug auf die Veränderlichen, als auch auf die Coefficienten der Gleichung rational sind; es muss daher die Benutzung conjugirter Wurzeln der definirenden Gleichung, und die der Linearfactoren der Functionen einer Variablen vollständig vermieden werden. Nur bei Erfüllung dieser Bedingung sind nämlich z. B. auch diejenigen Fälle der Behandlung zugänglich, wo zwischen den Gleichungscoefficienten beliebige algebraische Relationen bestehen. Dieser Forderung wird in der vorliegenden Arbeit dadurch genügt, dass die ganze Untersuchung auf die Betrachtung linearer homogener Gleichungen zurückgeführt wird, deren Coefficienten sich aus denjenigen der zu Grunde gelegten Gleichung rational, und zwar nur mit Hülfe des Euklidischen Verfahrens zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers bestimmen.

Eine wesentliche Vereinfachung der Theorie ergiebt sich dadurch, dass die Betrachtung der unendlich fernen Stellen des algebraischen Gebildes durch die Einführung homogener algebraischer Formen entbehrlich gemacht wird. Jede algebraische Function kann nämlich, wie die nachfolgenden Untersuchungen zeigen, als der Quotient zweier homogenen ganzen algebraischen Formen derselben Dimension dargestellt werden, welche niemals unendlich werden, und deren Nullstellen beziehlich denjenigen Stellen des Gebildes entsprechen, an welchen jene Function verschwindet oder unendlich gross wird, und hierdurch wird die Untersuchung von selbst auf die Betrachtung der *ganzen* algebraischen Formen reducirt. Die einzige hier zu entscheidende Fundamental-Frage ist die nach der vollstän-

digen Aufstellung *aller* ganzen algebraischen Formen, eine Frage, welche mit derjenigen nach den linear unabhängigen Formen niedrigster Dimension vollständig zusammenfällt. In dieser Arbeit wird nun zunächst gezeigt, wie man durch Auflösung linearer Gleichungen zur Darstellung eines solchen „Fundamentalsystems" gelangt. Hieran schliesst sich die Untersuchung derjenigen Formen, welche den ganzen am nächsten stehen, der sogenannten „Formen erster Gattung", und als Anwendung die vollständige rationale Darstellung der Integrale erster Gattung. Zugleich ergiebt sich die einfache Beziehung, welche zwischen der Gesammtdimension des Fundamentalsystems und dem Geschlecht des betrachteten algebraischen Gebildes besteht.

Ich bemerke endlich noch, dass die hier durchgeführten Untersuchungen auch auf die Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven ausgedehnt werden können, wie in einer späteren Arbeit dargelegt werden soll.

Die einzige Arbeit, in welcher die algebraischen Functionen beliebig vieler Variablen den obigen Anforderungen gemäss und ohne jede beschränkende Voraussetzung untersucht worden sind, ist die bereits erwähnte Festschrift des Herrn *Kronecker;* in ihr wird jedoch, entsprechend der umfassenderen Natur der abgeleiteten Resultate, auf die hier sich darbietenden Probleme, z. B. auf die Beziehungen zur Theorie der algebraischen Integrale nicht eingegangen, und insbesondere wird von der Betrachtung der unendlich fernen Stellen des algebraischen Gebildes vollständig abgesehen. Ausserdem hat Herr *Kronecker* die ebenen algebraischen Curven noch in einer Arbeit „Ueber die Discriminante algebraischer Functionen" (dieses Journal Bd. 91) behandelt und hier nachgewiesen, dass die betrachtete Curve von vornherein eindeutig in eine solche transformirt werden kann, welche nur Doppelpunkte besitzt. Die Fortsetzung dieser Arbeit, zu welcher jener Satz die Grundlage bildet, ist leider noch nicht veröffentlicht worden, obwohl sie, wie ich weiss, längst abgeschlossen ist. In diesem Zusammenhange ist ferner noch auf die früher veröffentlichte Arbeit des Herrn *Nöther* „Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve" (Math. Ann. Bd. 9), und ganz besonders auf seine wichtige Abhandlung „Ueber die rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen" (Math. Ann. Bd. 23) hinzuweisen, in welcher einige der hier untersuchten Probleme in einer von der unsrigen völlig verschiedenen Weise, jedoch unter Zugrundelegung genau derselben Forderungen behandelt worden sind.

I.

Die rationalen Functionen einer Variablen und die rationalen homogenen Formen.

Eine jede rationale Function von x kann als Quotient zweier ganzen Functionen dargestellt werden, es ist also

$$\frac{f(x)}{g(x)} \tag{1.}$$

der allgemeinste Ausdruck einer rationalen Function, wenn $f(x)$ und $g(x)$ beliebige ganze Functionen von x bedeuten. Die Coefficienten werden, um gleich den allgemeinsten Fall zu umfassen, als rationale Functionen beliebig vieler Unbestimmten $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots)$ vorausgesetzt, zwischen denen wiederum eine algebraische Gleichung bestehen kann.

Setzt man nun:

$$x_1 = \frac{x}{x-u}, \quad x_2 = \frac{1}{x-u}, \tag{2.}$$

wo u eine unbestimmte Grösse bedeutet, so sind x_1 und x_2 Formen von x, von denen *für ein unbestimmtes aber endliches* u keine unendlich gross wird, während x_1 nur für $x = 0$, x_2 nur für $x = \infty$ verschwindet; die erste Eigenschaft dieser Formen lässt sich auch dahin aussprechen, dass für jeden endlichen oder unendlichen Werth von x der Grösse u ein solcher endlicher Werth beigelegt werden kann, dass x_1 und x_2 endliche Zahlen sind. Dann ist aber:

$$x = \frac{x_1}{x_2}. \tag{3.}$$

Macht man nun in (1.) diese Substitution für x und bezeichnet die dann im Zähler und Nenner auftretenden homogenen ganzen Formen beziehlich durch $f(x_1, x_2)$ und $g(x_1, x_2)$, so erhält man für eine beliebige rationale Function die folgende Darstellung:

$$\frac{f(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)}, \tag{4.}$$

wo f und g homogene ganze Formen derselben Dimension in x_1 und x_2 sind. Man braucht daher zunächst nur die homogenen *ganzen* Formen von (x_1, x_2) zu untersuchen, da sich jede Function von x als Quotient zweier ganzen Formen derselben Dimension darstellen lässt.

Eine ganze homogene Form ist auch dadurch charakterisirt, dass sie für ein unbestimmtes aber endliches u offenbar niemals über jede Grenze hinaus wachsen kann, da dasselbe für x_1 und x_2 der Fall ist.

Es sei nun $P(x_1, x_2)$ eine homogene ganze Form von x_1 und x_2 und λ ihre Dimension, d. h. es sei:

$$P(x_1, x_2) = a_0 x_1^\lambda + a_1 x_1^{\lambda-1} x_2 + \cdots + a_\lambda x_2^\lambda,$$

so kann man stets voraussetzen, dass von den beiden äussersten Coefficienten a_0 und a_λ mindestens einer von Null verschieden ist, da man anderenfalls P in ein Product von Formen zerlegen kann, von welchen jede die angegebene Eigenschaft besitzt. Im Allgemeinen sind sogar beide Coefficienten nicht gleich Null, ausser wenn

$$P = x_1^\lambda \quad \text{oder} \quad P = x_2^\lambda$$

ist. Ist nun $f(x_1, x_2)$ eine beliebige ganze Form, so ergiebt sich durch einfache Division eine Gleichung:

$$(4^a.) \qquad f(x_1, x_2) = P(x_1, x_2) Q(x_1, x_2) + f_1(x_1, x_2),$$

oder, was dasselbe ist, eine Congruenz:

$$f(x_1, x_2) \equiv f_1(x_1, x_2) \quad (\text{mod. } P(x_1, x_2)),$$

in welcher f_1 von gleicher Dimension wie f, aber in Bezug auf eine der Grössen x_1 oder x_2 höchstens vom $(\lambda-1)$ten Grade ist. Wir wollen die Division stets so ausgeführt denken, dass der Grad von f_1 in Bezug auf x_1 der möglichst niedere ist, ausser natürlich in dem Falle, wo $P = x_2^\lambda$ ist, und wo x_2 an die Stelle von x_1 tritt. Die so sich ergebende Form $f_1(x_1, x_2)$ soll der kleinste Rest heissen, welchen f, modulo P betrachtet, lässt. Eine Form, die modulo P bereits auf ihren kleinsten Rest reducirt ist, kann offenbar nur dann durch P theilbar sein, wenn sie gleich Null ist.

Durch successive Anwendung des in $(4^a.)$ auseinandergesetzten Divisionsverfahrens kann man, ebenso wie in der Theorie der ganzen Functionen von x, den grössten gemeinsamen Theiler zweier ganzen Formen auf rationalem Wege finden, oder sich überzeugen, dass sie zu einander relativ prim oder theilerfremd sind. Ist $f(x_1, x_2)$ zu $P(x_1, x_2)$ relativ prim, so kann man vermittelst dieses „*Euklidischen Verfahrens* zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers", stets eine solche ganze homogene Form F finden, dass:

$$f.F \equiv x_2^\mu \quad (\text{mod. } P(x_1, x_2))$$

ist, wo μ einen ganzzahligen nicht negativen Exponenten bedeutet. Sollte $P = x_2^\lambda$ sein, so würde hier, wie stets im Folgenden, wieder x_1 an die Stelle von x_2 treten.

Betrachtet man nun eine gebrochene homogene Form, also:

$$(5.)\qquad F(x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)},$$

so versteht man unter ihrer Dimension die Differenz der Dimensionen ihres Zählers und ihres Nenners. Eine homogene Form der $m$ten Dimension ist hiernach dadurch charakterisirt, dass:

$$(6.)\qquad F(tx_1, tx_2) = t^m.F(x_1, x_2)$$

ist. Hieraus ergiebt sich leicht, dass alle homogenen Formen der nullten Dimension, und nur sie, rationalen Functionen von x gleich sind. Der zweite Theil dieses Satzes ist an sich klar; um den ersten zu beweisen, braucht man in der Gleichung (6.) nur $m = 0$ und $t = \frac{1}{x_2}$ zu setzen; die so sich ergebende Gleichung:

$$F\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right) = F(x_1, x_2)$$

lehrt dann unmittelbar, dass jede homogene Form nullter Dimension einer Function von x gleich ist, und dass man diese erhält, wenn man x_1 durch x, x_2 durch 1 ersetzt.

Eine weitere Consequenz dieses Satzes ist die, dass man die homogenen Formen derselben Dimension in eine *Klasse* rechnen darf; die Formen derselben Klasse haben dann die charakteristische Eigenschaft, dass das Verhältniss je zweier von ihnen einer Function von x gleich ist. Für diese „relative Aequivalenz" der Formen bestehen wörtlich dieselben Sätze, wie in dem entsprechenden Gebiete der Zahlentheorie, nur ist hier die Anzahl der nicht äquivalenten Klassen offenbar unendlich gross, da ja die Dimension einer Form jeder positiven oder negativen ganzen Zahl gleich sein kann.

Betrachtet man nun alle homogenen rationalen Formen

$$F(x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)}$$

nicht mehr für sich, sondern für eine homogene ganze Form $P(x_1, x_2)$ als Modul, so soll F, modulo P betrachtet, ganz genannt werden, wenn ihr Nenner mit P keinen gemeinsamen Theiler hat. Diese Formen sind dadurch offenbar vollkommen charakterisirt, dass sie für keinen derjenigen Werthe von x über jedes Mass hinaus wachsen, für welche $P(x_1, x_2)$ für ein variables u verschwindet; und hieraus ergiebt sich leicht, dass auch für diesen weiteren Bereich der modulo P ganzen Formen die Summe und das Product beliebig vieler ganzen Formen wiederum ganz ist.

II.

Die algebraischen Functionen einer Variablen und die homogenen algebraischen Formen.

Es sei y als algebraische Function von x durch die Gleichung

$$(1.)\qquad A_0y^n+A_1y^{n-1}+\cdots+A_n = 0$$

definirt, wo $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ganze Functionen von x sind; die höchste in ihnen auftretende Potenz von x sei die $m$te. Führt man auch hier an Stelle von x den Quotienten $\frac{x_1}{x_2}$ ein, und macht man alsdann diese Gleichung in x_1, x_2 homogen, indem man sie mit x_2^m multiplicirt, so lässt sie sich folgendermassen schreiben:

$$A_0(x_1, x_2)y^n+A_1(x_1, x_2)y^{n-1}+\cdots+A_n(x_1, x_2) = 0,$$

wo jetzt die Coefficienten sämmtlich homogene ganze Formen der $m$ten Dimension von x_1, x_2 sind.

Setzt man nun

$$(2.)\qquad \eta = y.A_0(x_1, x_2),$$

so genügt die algebraische Form η jetzt der Gleichung:

$$\eta^n+A_1\eta^{n-1}+A_0A_2\eta^{n-2}+A_0^2A_3\eta^{n-3}+\cdots+A_0^{n-1}A_n = 0,$$

welche auch folgendermassen geschrieben werden kann:

$$(3.)\qquad \eta^n+\bar{A}_1(x_1, x_2)\eta^{n-1}+\bar{A}_2(x_1, x_2)\eta^{n-2}+\cdots+\bar{A}_n(x_1, x_2) = 0,$$

wenn allgemein $\bar{A}_i$ eine homogene Form von (x_1, x_2) der mi-ten Dimension ist.

Wir wollen η eine *homogene algebraische Form* von (x_1, x_2) nennen, weil sie einmal der algebraischen Gleichung (3.) genügt, und weil andererseits aus der Gleichung (2.) folgt, dass η in $t^m\eta$ übergeht, wenn man an Stelle von x_1, x_2 beziehlich tx_1 und tx_2 setzt. Auch hier soll der Exponent m die „Dimension" der algebraischen Form η heissen.

Wir betrachten jetzt die rationalen Functionen von (x_1, x_2, η) unter der Voraussetzung, dass η mit x_1 und x_2 durch die Gleichung (3.) verbunden ist. Dann können alle diese Functionen auf eine, und auch nur auf eine Weise auf die Form gebracht werden:

$$(4.)\qquad w = u_0+u_1\eta+\cdots+u_{n-1}\eta^{n-1},$$

wo $u_0, \ldots, u_{n-1}$ Formen von (x_1, x_2) sind. Bei der weiteren Untersuchung brauchen wir aber nur die *homogenen* Formen, d. h. diejenigen zu betrachten, welche sich mit einer Potenz von t multipliciren, wenn man x_1, x_2, η beziehlich durch $tx_1, tx_2, t^m\eta$ ersetzt. In der That, seien $w_1, \ldots, w_\nu$ homo-

gene algebraische Formen verschiedener Dimensionen, so lässt sich leicht zeigen, dass eine Gleichung:

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_\nu = 0$$

dann und nur dann bestehen kann, wenn die ν einzelnen Formen selbst verschwinden. Macht man nämlich für x_1, x_2, η die oben angegebene Substitution, so geht diese Gleichung über in:

$$t^{\mu_1} w_1 + t^{\mu_2} w_2 + \cdots + t^{\mu_\nu} w_\nu = 0,$$

welche für ein variables t bestehen müsste, was offenbar nur unter der oben gemachten Voraussetzung möglich ist.

Auch die homogenen algebraischen Formen lassen sich nach ihrer Dimension μ in Klassen theilen, von denen diejenigen mit der Dimension Null wieder die Hauptklasse bilden. Diese sind nämlich durch die charakteristische Eigenschaft bestimmt, dass sie und nur sie algebraischen Functionen von x gleich sind. Betrachtet man nämlich eine beliebige rationale Function $F(x, y)$, und setzt hier:

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad y = \frac{\eta}{A_0(x_1, x_2)}, \tag{5.}$$

so erhält man eine homogene algebraische Form der nullten Dimension, weil sie bei der Substitution

$$x_1 = tx_1, \quad x_2 = tx_2, \quad \eta = t^m \eta$$

ungeändert bleibt. Hat man umgekehrt eine homogene algebraische Form der nullten Dimension, für welche also:

$$\Phi(tx_1, tx_2, t^m \eta) = \Phi(x_1, x_2, \eta)$$

ist, und setzt man hierin $t = \frac{1}{x_2}$, so ergiebt sich unter Benutzung von (2.):

$$\Phi(x_1, x_2, \eta) = \Phi\left(\frac{x_1}{x_2}, 1, \frac{\eta}{x_2^m}\right) = \Phi(x, 1, y \,.\, A_0(x, 1)).$$

und damit ist jener Satz bewiesen. Aus der Definition der homogenen Formen ergiebt sich unmittelbar, dass die Dimension eines Productes homogener Formen der Summe der Dimensionen seiner Factoren gleich ist.

Diese Eintheilung der algebraischen Formen in Klassen ist deshalb mit derjenigen der Zahlentheorie im Einklange, weil irgend zwei Formen derselben Klasse zwei algebraischen Functionen von x proportional sind. Formen derselben Klasse sollen auch hier „relativ äquivalent" heissen. Insbesondere ist dann jede algebraische Form einer positiven oder negativen Potenz von x_2 relativ äquivalent, deren Exponent eben der Dimension der Form gleich ist.

III.

Die ganzen algebraischen Formen.

Jede homogene algebraische Form:

$$(1.)\qquad w = u_0+u_1\eta+\cdots+u_{n-1}\eta^{n-1}$$

genügt einer Gleichung des $n$ten Grades:

$$(2.)\qquad w^n+B_1(x_1, x_2)w^{n-1}+\cdots+B_n(x_1, x_2) = 0,$$

deren Coefficienten Formen von (x_1, x_2) sind. Man kann diese Gleichung z. B. dadurch finden, dass man die n Producte $w, w\eta, \ldots, w\eta^{n-1}$ mit Hülfe der Gleichung (3.) des vorigen Paragraphen auf den $(n-1)$ten Grad in η reducirt. Aus den so sich ergebenden n Relationen

$$w\eta^{i-1} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik}\eta^{k-1} \qquad (i=1, \ldots, n)$$

erhält man dann die gesuchte Gleichung (2.) in Determinantenform:

$$(3.)\qquad |u_{ik}-\delta_{ik}w| = 0 \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n),$$

wo nach einer gebräuchlichen Bezeichnungsweise δ_{ik} gleich Null oder gleich Eins zu setzen ist, je nachdem die Indices i, k verschiedene oder gleiche Werthe besitzen. — Ist μ die Dimension von w, geht also w in $t^\mu w$ über, wenn x_1, x_2 durch tx_1, tx_2 ersetzt werden, so erkennt man leicht, dass die linke Seite jener Gleichung ebenfalls eine homogene algebraische Form ist, und zwar ergiebt sich aus ihrem ersten Gliede, dass sie von der μn-ten Dimension ist. Daraus folgt, dass allgemein der $i$te Coefficient B_i in (2.) eine homogene Form der μi-ten Dimension von (x_1, x_2) ist.

Eine homogene algebraische Form w soll dann ganz heissen, wenn die niedrigste irreductible Gleichung, der sie genügt, ganze Formen von (x_1, x_2) als Coefficienten enthält, während der Coefficient der höchsten Potenz gleich Eins ist; es ist diese Bedingung bekanntlich gleichbedeutend mit der, dass auch die homogenen Formen $B_1, \ldots, B_n$ in (2.) ganz sind. Offenbar haben die ganzen algebraischen Formen die charakteristische Eigenschaft, für *alle* Werthe von x stets endlich zu bleiben, wenn die Unbestimmte u auf endliche Werthe beschränkt wird. Es ergiebt sich hieraus auch sofort, dass jede ganze Function einer oder mehrerer ganzen algebraischen Formen wieder ganz ist. — Die ganzen algebraischen Formen der nullten Dimension, oder der Hauptklasse sind offenbar die Constanten und nur diese.

Eine jede gebrochene algebraische Form kann nun, wie gleich gezeigt werden wird, stets als Quotient zweier ganzen Formen dargestellt werden; durch diese einfache Bemerkung reducirt sich die vorliegende Unter-

suchung von selbst auf die Betrachtung aller ganzen algebraischen Formen. Aus diesem Grunde bildet die Aufstellung eines vollständigen Systemes aller ganzen algebraischen Formen eine Fundamentalaufgabe für die allgemeine Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen. Es ist zunächst sehr leicht, ein System von solchen Functionen zu finden, welches jedoch im Allgemeinen kein vollständiges ist. Ist nämlich η die durch die Gleichung (3.) des vorigen Paragraphen definirte ganze algebraische Form, und setzt man:

$$\eta_i = \eta^{i-1} \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{4.}$$

so sind die n ganzen algebraischen Formen

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \ldots, \quad \eta_n \tag{5.}$$

wegen der Irreductibilität der Gleichung für η rational unabhängig, d. h. es kann jede rationale homogene Function w von x_1, x_2, η auf eine, und nur auf eine Weise in der Form

$$w = u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \cdots + u_n\eta_n \tag{6.}$$

mit homogenen Formen von x_1 und x_2 als Coefficienten dargestellt werden. Sind bei dieser Darstellung die Coefficienten $u_1, \ldots, u_n$ sämmtlich ganz, so ist w offenbar eine ganze algebraische Form, d. h. w genügt einer Gleichung, deren Coefficienten ganze homogene Functionen von (x_1, x_2) sind; sind jene Coefficienten gebrochene Formen, und bezeichnet man ihren kleinsten gemeinsamen Nenner durch $P(x_1, x_2)$, so lässt sich w folgendermassen darstellen:

$$w = \frac{u_1\eta_1 + \cdots + u_n\eta_n}{P(x_1, x_2)}, \tag{6^a.}$$

d. h. jede gebrochene algebraische Form ist als Quotient zweier ganzen homogenen Formen darstellbar. Es kann nun leicht der Fall eintreten, dass eine Form w algebraisch ganz ist, obwohl sie, durch das System (5.) ausgedrückt, in gebrochener Form erscheint, d. h. ohne dass bei ihrer Darstellung in der Form (6^a.) jede der ganzen Formen $u_1, \ldots, u_n$ durch den gemeinsamen Nenner $P(x_1, x_2)$ theilbar ist. Es sind also zunächst die Bedingungen aufzustellen, damit eine algebraische Form durch eine ganze homogene Form $P(x_1, x_2)$ von x_1 und x_2 theilbar ist, und hierzu ist es wieder nöthig, überhaupt das Verhalten einer beliebigen algebraischen Form für eine ganze rationale Form als Modul genauer zu untersuchen.

Ebenso, wie eine algebraische Form w ganz heisst, wenn in der Gleichung (1.), der sie genügt, die Coefficienten $B_1, \ldots, B_n$ *ganze* Formen von x_1 und x_2 sind, soll eine Form w für einen Modul $P(x_1, x_2)$ als algebraisch

ganz bezeichnet werden, wenn ihre Gleichungscoefficienten, modulo P betrachtet, ganze Formen von (x_1, x_2) sind, d. h. wenn die kleinsten Nenner derselben sämmtlich mit $P(x_1, x_2)$ keinen gemeinsamen Theiler haben. Denkt man sich die Gleichung für w durch Multiplication mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen $\bar{B}_0$ aller dieser Nenner auf die Form gebracht:

$$\bar{B}_0 w^n + \bar{B}_1 w^{n-1} + \cdots + \bar{B}_n = 0,$$

so ist also w, modulo P betrachtet, dann und nur dann algebraisch ganz, wenn $\bar{B}_0$ zu P theilerfremd ist. Hieraus folgt, dass die modulo P ganzen algebraischen Formen auch dadurch vollständig charakterisirt sind, dass sie für keinen Werth von x über jedes Mass hinaus wachsen, welchem eine Nullstelle von $P(x_1, x_2)$ entspricht, für welchen also $P(x_1, x_2)$ für ein unbestimmtes aber endliches u unendlich klein ist; ebenso erkennt man auch, dass die Summe und das Product beliebig vieler solcher ganzen Formen wieder eine Form ergiebt, welche, modulo P betrachtet, algebraisch ganz ist.

Stellt man die rationalen Functionen w von (x_1, x_2, η) wieder in der Form (6.) dar, so folgt aus den obigen Bemerkungen, dass w, modulo P betrachtet, sicher algebraisch ganz ist, wenn die Coefficienten $u_1, \ldots, u_n$ für denselben Modul ganze rationale Formen sind, d. h. wenn ihre Nenner mit P keinen gemeinsamen Theiler haben. Es soll jetzt aber weiter untersucht werden, ob auch eine Form:

$$(6^a.) \qquad w = \frac{u_1\eta_1 + \cdots + u_n\eta_n}{P(x_1, x_2)},$$

modulo P betrachtet, ganz sein kann, ohne dass $u_1, \ldots, u_n$ sämmtlich durch P theilbar sind.

Bei dieser Untersuchung sind die Coefficienten $u_1, \ldots, u_n$ zunächst als solche gebrochene Formen von (x_1, x_2) vorauszusetzen, welche, modulo P betrachtet, ganz sind, deren Nenner also zu P relativ prim ist; indessen kann man die algebraische Form w, ohne ihren Charakter in Bezug auf P zu ändern, mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen aller jener Nenner multipliciren, d. h. jene n Coefficienten von vorn herein als *ganze* homogene Formen von x_1 und x_2 voraussetzen. Ferner braucht man die ganzen Formen $u_1, \ldots, u_n$ nur modulo P zu betrachten, d. h. man kann sie stets auf ihren kleinsten Rest für diesen Divisor reducirt annehmen, da ja die fortgelassenen Vielfachen von P schon von selbst durch diese Form theilbar sind. Es sollen daher im Folgenden alle Coefficienten bereits in dieser Weise angenommen werden.

IV.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Theilbarkeit einer algebraischen durch eine rationale homogene Form.

Es sei also jetzt

$$(1.)\qquad \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_n$$

ein System von n linear unabhängigen ganzen algebraischen Formen, z. B. das System (4.) des vorigen Paragraphen, und $P(x_1, x_2)$ irgend eine homogene ganze Form von x_1 und x_2, so soll jetzt untersucht werden, welchen Bedingungen die Coefficienten der ganzen algebraischen Form

$$(2.)\qquad w = u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \cdots + u_n\eta_n$$

genügen müssen, damit diese durch die Form P algebraisch theilbar ist. Die vollständige Lösung dieser Fundamentalfrage bietet sehr erhebliche Schwierigkeiten dar, welche aber sofort schwinden, wenn man dieselbe in einem erweiterten Umfange behandelt: Wir wollen nämlich zunächst nach den Bedingungen fragen, welchen die Coefficienten $u_1, \ldots, u_n$ der Form w genügen müssen, damit sie durch eine Potenz

$$P^{\delta}$$

der rationalen Form $P(x_1, x_2)$ algebraisch theilbar ist, d. h. damit die Gleichung des $n$ten Grades, der

$$(3.)\qquad z = \frac{w}{P^{\delta}}$$

genügt, lauter *ganze* homogene Formen von x_1 und x_2 als Coefficienten besitzt. Der vorläufig unbestimmt bleibende Exponent δ soll aber nicht auf ganzzahlige Werthe beschränkt, sondern von vorn herein gleich einer beliebigen gebrochenen positiven Zahl angenommen werden. Aus der Lösung dieser Frage ergiebt sich dann diejenige der im Anfange dieses Paragraphen angegebenen Fundamentalaufgabe dadurch, dass man den Exponenten δ successive gleich $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n}$ annimmt.

Es sei nun

$$(4.)\qquad w^n + U_1(u_1 \ldots u_n)w^{n-1} + \cdots + U_n(u_1 \ldots u_n) = 0$$

die Gleichung, der w für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ genügt; ihre Coefficienten $U_1, \ldots, U_n$ sind dann offenbar homogene Formen beziehlich vom ersten, zweiten bis $n$ten Grade von $u_1, \ldots, u_n$. Führt man nun an Stelle von w die Function z durch die Gleichung (3.) ein, so genügt diese der Gleichung:

$$(4^a.)\qquad P^{n\delta}z^n + P^{(n-1)\delta}U_1 z^{n-1} + \cdots + U_n = 0,$$

und man erkennt leicht, dass z dann und nur dann in dem eben angegebenen Sinne ganz sein wird, wenn alle Coefficienten dieser Gleichung durch $P^{n\delta}$ theilbar, oder also, wenn $u_1, \ldots, u_n$ so gewählt werden, dass die n Congruenzen:

$$(5.)\qquad P^{(n-i)\delta}.U_i(u_1\ldots u_n)\equiv 0 \pmod{P^{n\delta}} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

sämmtlich erfüllt sind.

Die hier gefundenen nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass w durch P^{δ} algebraisch theilbar ist, lassen sich in sehr einfacher und übersichtlicher Weise unter Benutzung des von Herrn *Kronecker* in die Wissenschaft eingeführten Begriffes der *Modulsysteme* zusammenfassen. Sind nämlich

$$(a_1\ldots a_m) \quad \text{und} \quad (b_1\ldots b_n)$$

zwei Systeme irgend welcher ganzen Grössen, so sollen dieselben dann *äquivalent* heissen, wenn die Grössen a als homogene lineare Functionen der Grössen b mit ganzen Coefficienten dargestellt werden können, und umgekehrt den Grössen b dieselbe Eigenschaft in Bezug auf die a zukommt. Diese Beziehung soll durch

$$(a_1\ldots a_m)\sim(b_1\ldots b_n)$$

ausgedrückt werden. Mit Benutzung dieser Bezeichnung lassen sich offenbar die Congruenzen (5.) folgendermassen schreiben:

$$(6.)\qquad (P^{(n-i)\delta}.U_i(u_1\ldots u_n),\ P^{n\delta})\sim P^{n\delta} \qquad (i=1,2,\ldots,n);$$

denn diese Aequivalenz besagt nur, dass die n Formen $P^{(n-i)\delta}U_i(u_1\ldots u_n)$ durch $P^{n\delta}$ theilbar, d. h. dass die n Congruenzen (5.) erfüllt sind.

Man kann nun die Bedingung (6.) durch eine andere ersetzen mit Hülfe der folgenden Ueberlegung: Hat man zwei ganze algebraische Formen, welche durch P^{δ} theilbar sind, so gilt von ihrer Summe ein Gleiches. Sind nun $v_1, \ldots, v_n$ unbestimmte Variable, so ist offenbar

$$P^{\delta}\bar{w} = (v_1\eta_1+\cdots+v_n\eta_n)P^{\delta}$$

eine durch P^{δ} theilbare Form. Sind also $u_1, \ldots, u_n$ so gewählt, dass der Aequivalenz (6.) genügt wird, dass also w durch P^{δ} theilbar ist, so gilt nach der soeben gemachten Bemerkung dasselbe für

$$w+P^{\delta}\bar{w} = \sum_k (u_k+P^{\delta}v_k)\eta_k$$

für variable Werthe von $v_1, \ldots, v_n$. Hieraus folgt, dass die obige Aequi-

valenz dann und nur dann erfüllt ist, wenn sie bestehen bleibt, falls in ihr allgemein

$$u_k \quad \text{durch} \quad u_k + P^\delta v_k$$

ersetzt wird, und $v_1, \ldots, v_n$ Variable bedeuten. Jene nothwendige und hinreichende Bedingung (6.) lässt sich also folgendermassen schreiben:

$$(7.) \qquad (P^{(n-i)\delta}.\, U_i(\ldots, u_k + P^\delta v_k, \ldots),\ P^{n\delta}) \backsim P^{n\delta},$$

und zwar muss diese Aequivalenz für variable $v_1, \ldots, v_n$ bestehen, d. h. der Coefficient eines jeden Productes von Potenzen der Unbestimmten v muss für sich durch $P^{n\delta}$ theilbar sein.

Entwickelt man nun nach dem *Taylor*schen Satze jede der Formen U_i des Systemes (7.) nach Potenzen der Variablen $v_1, \ldots, v_n$, so ergiebt sich:

$$U_i(u_1 + P^\delta v_1, \ldots, u_n + P^\delta v_n) = U_i + P^\delta \Sigma \frac{\partial U_i}{\partial u_\varkappa} v_\varkappa + \cdots + P^{i\delta} \Sigma \frac{\partial^i U_i}{\partial u_{\varkappa_1} \ldots \partial u_{\varkappa_i}} v_{\varkappa_1} \ldots v_{\varkappa_i}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{i} P^{\lambda\delta} \sum_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_\lambda} U_i^{(\lambda)} v_{\varkappa_1} \ldots v_{\varkappa_\lambda},$$

wo $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda$ unabhängig von einander alle Werthe $1, 2, \ldots, n$ annehmen, und allgemein $U_i^{(\lambda)}$ die λte Ableitung von $U_i(u_1, \ldots, u_n)$ nach den λ Unbestimmten $u_{\varkappa_1}, \ldots, u_{\varkappa_\lambda}$ bedeutet. Da nun der Coefficient eines jeden Productes $v_{\varkappa_1} \ldots v_{\varkappa_\lambda}$ in der Entwickelung des Systemes (7.) für sich durch $P^{n\delta}$ theilbar sein muss, so kann die Bedingung (7.) durch die folgende ihr äquivalente ersetzt werden:

$$(8.) \qquad (P^{(n-i+\lambda)\delta}.\, U_i^{(\lambda)}(u_1 \ldots u_n);\ P^{n\delta}) \backsim P^{n\delta} \qquad \left(\begin{smallmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ \lambda = 0, 1, \ldots, i \end{smallmatrix}\right).$$

Aber auch dieses System von Bedingungen kann beträchtlich vereinfacht werden, und zwar durch den Nachweis, dass eine Anzahl der homogenen Formen dieses Moduls homogen und linear durch die übrigen dargestellt werden können; alle diese können offenbar in (8.) einfach fortgelassen werden, weil sie sicher durch $P^{n\delta}$ theilbar sind, sobald diese Bedingung für die übrigen Formen erfüllt ist. Um diesen Nachweis zu führen, wollen und können wir annehmen, dass die Zahl Eins durch die n Formen $\eta_1, \ldots, \eta_n$ homogen und linear darstellbar ist; es ist dieses ja für das System (4.) des vorigen Paragraphen der Fall, wo η_1 selbst gleich Eins ist. Sei also:

$$-1 = a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \cdots + a_n\eta_n.$$

Dann kann die Gleichung (4.), der w genügt, bekanntlich auch folgendermassen geschrieben werden:

$$F(w) = N(w - (u_1\eta_1 + \cdots + u_n\eta_n)) = N((u_1 + w a_1)\eta_1 + \cdots + (u_n + w a_n)\eta_n)$$

wenn, wie gewöhnlich, $N(\zeta)$ die Norm der algebraischen Function ζ bedeutet; jene Gleichung geht also aus ihrem constanten Gliede $U_n(u_1 \dots u_n)$ dadurch hervor, dass man allgemein:

$$u_x \text{ ersetzt durch } u_x + w a_x.$$

Entwickelt man den so sich ergebenden Werth von U_n nach steigenden Potenzen von w und vergleicht ihn dann mit dem in (4.) gegebenen Ausdruck von $F(w)$, so erhält man zur Bestimmung der Coefficienten U_i die Gleichung:

$$U_n + U_{n-1} w + \dots + w^n = U_n + w \Sigma U_n^{(1)} a_x + \dots + w^n \Sigma U_n^{(n)} a_{x_1} \dots a_{x_n};$$

es ist also:

$$(9.) \qquad U_i = \Sigma U_n^{(n-i)} a_{x_1} \dots a_{x_{n-i}},$$

wo $U_n^{(n-i)}$ wie vorher allgemein alle $(n-i)$ten Ableitungen von U_n bezeichnet. Hieraus ergiebt sich durch Differentiation für irgend eine der λten Ableitungen von U_i die folgende Darstellung

$$U_i^{(\lambda)} = \Sigma U_n^{(n-i+\lambda)} a_{x_1} \dots a_{x_{n-i}},$$

und demnach ist:

$$P^{(n-i+\lambda)\delta} U_i^{(\lambda)} = \sum_{x_1 \dots x_{n-i}} P^{(n-i+\lambda)\delta} . U_n^{(n-i+\lambda)} a_{x_1} \dots a_{x_{n-i}}.$$

Es sind also alle Elemente des Modulsystemes (8.) homogen und linear durch die folgenden unter ihnen:

$$P^{(n-i+\lambda)\delta} . U_n^{(n-i+\lambda)} \qquad \binom{i=1, 2, \dots, n}{\lambda = 0, 1, \dots, i},$$

oder, was dasselbe ist durch

$$P^{\nu\delta} . U_n^{(\nu)}(u_1 \dots u_n) \qquad (\nu = 0, 1, \dots, n)$$

darstellbar, d. h. es können alle übrigen Formen jenes Systems fortgelassen werden. Setzt man daher jetzt der Einfachheit wegen

$$(10.) \qquad U_n(u_1 \dots u_n) = N(w) = U(u_1 \dots u_n),$$

so lässt sich das bis jetzt erlangte wichtige Resultat folgendermassen aussprechen:

Die algebraische Form $w = u_1 \eta_1 + \dots + u_n \eta_n$ ist dann und nur dann durch $P(x_1, x_2)^\delta$ algebraisch theilbar, wenn ihre Coefficienten solche homogene Functionen von x_1 und x_2 sind, dass die Aequivalenz

$$(11.) \qquad (P^{\nu\delta} . U^{(\nu)}, P^{n\delta}) \sim P^{n\delta} \qquad (\nu = 0, 1, \dots, n)$$

besteht, oder, was dasselbe ist, dass die Congruenzen:

$$(11^a.) \qquad P^{\nu\delta} U^{(\nu)} \equiv 0 \pmod{P^{n\delta}} \qquad (\nu = 0, 1, \dots, n)$$

erfüllt sind, wo allgemein $U^{(\nu)}$ jede der νten Ableitungen von $U(u_1 \dots u_n) = N(w)$ nach den Unbestimmten $u_1, \dots, u_n$ bedeutet.

V.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Theilbarkeit einer algebraischen durch eine rationale Form lassen sich auf lineare Congruenzen zurückführen.

Die am Ende des vorigen Abschnittes gefundenen Bedingungen (11.) oder (11ᵃ.) für die Theilbarkeit einer algebraischen Form durch eine homogene Function P^{δ} von x_1 und x_2 sind deshalb sehr complicirter Natur, weil sie die Auflösung einer grossen Anzahl homogener Congruenzen der ersten, zweiten bis $n$ten Dimension erfordern würden. Es soll nun aber gezeigt werden, dass das System (11.) äquivalent ist einem sogenannten *linearen Divisorensystem*

$$(1.)\qquad (W_1, W_2, \ldots, W_m, P)$$

d. h. einem solchen, dessen sämmtliche Formen W_i *lineare* homogene Functionen ihrer Unbestimmten sind; oder, was dasselbe ist, es soll nachgewiesen werden, dass das System der Congruenzen (11ᵃ.) des vorigen Paragraphen ersetzt werden kann durch eine Anzahl homogener linearer Congruenzen modulo P

$$(1^a.)\qquad W_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k \equiv 0 \pmod{P(x_1, x_2)}.$$

Zu diesem Zwecke ist es nöthig, zunächst einige Eigenschaften der linearen Modulsysteme anzuführen, welche sich aus ihrer Natur unmittelbar ergeben.

Betrachtet man ein lineares Modulsystem (1.) oder ein System linearer Congruenzen (1ᵃ.), so bleibt das System seiner Lösungen ungeändert, wenn man die Unbestimmten $u_1, \ldots, u_n$ in andere $u_1', \ldots, u_n'$ durch eine Substitution

$$u_i = \Sigma \alpha_{ik} u_k'$$

transformirt, deren Determinante $|\alpha_{ik}|$ mit P keinen gemeinsamen Theiler hat; denn alsdann entspricht jeder Lösung $u_1, \ldots, u_n$ eindeutig eine andere $u_1', \ldots, u_n'$. Ferner sind die Congruenzen (1ᵃ.) völlig identisch mit denjenigen, welche man aus ihnen erhält, wenn man irgend eine Form W_i durch $W_i + \alpha W_k$ ersetzt, da beide Systeme offenbar genau dieselben Lösungen ergeben, es ist also

$$(W_1 \ldots W_i \ldots W_n, P) \sim (W_1 \ldots W_i + \alpha W_k \ldots W_m, P).$$

Betrachtet man aber die Veränderungen, welche das Coefficientensystem

$$|a_{ik}| \qquad \binom{i=1, \ldots, m}{k=1, \ldots, n}$$

der m Linearformen W_i bei jenen beiden Umformungen erleidet, so er-

kennt man, dass die erste einer linearen Verbindung der Vertical-, die letzte einer Verbindung der Horizontalreihen entspricht. Beide sind somit auf jenes Coefficientensystem anwendbar. Ist dies aber der Fall, so kann man *) das lineare Modulsystem durch successive Transformationen in ein anderes von der einfachen Form überführen:

$$(2.)\qquad (P_n u'_n,\ P_n P_{n-1} u'_{n-1},\ \dots,\ P_n P_{n-1} \dots P_1 u'_1,\ P),$$

wo allgemein das Product $(P_n . P_{n-1} \dots P_{n-i})$ der grösste gemeinsame Theiler der Form P mit allen Unterdeterminanten der $i$ten Ordnung der aus den Coefficienten a_{ik} gebildeten Matrix ist; oder, was dasselbe ist, man kann die Unbestimmten $u_1, \dots, u_n$ durch eine lineare Transformation in andere $u'_1, \dots, u'_n$ so transformiren, dass das System der Congruenzen (1^a.) sich auf das folgende einfachere reducirt

$$(2^a.)\qquad P_n P_{n-1} \dots P_i u'_i \equiv 0 \quad (\text{mod. } P),$$

wo die Coefficienten $P_1, \dots, P_i$ sämmtlich Theiler von P sind.

Es werde nun angenommen, dass die Form $P(x_1, x_2)$ keine gleichen Factoren enthält; dieser Fall soll im Folgenden stets vorausgesetzt werden; sollte P etwa gleiche Factoren besitzen, so können diese durch Anwendung des Euklidischen Verfahrens leicht auf rationalem Wege gefunden und durch einfache Division entfernt werden. Sind dann wieder $P_1, \dots, P_n$ die oben angegebenen Theiler von P mit den Unterdeterminanten jener Matrix, und ist

$$(2^b.)\qquad P = P_0 P_1 P_2 \dots P_n,$$

so sind diese $(n+1)$ Formen alle relativ prim zu einander.

Betrachtet man dann dasselbe System linearer Congruenzen wie vorher, aber nicht mehr modulo P, sondern für jeden einzelnen der $n+1$ Theiler von P in (2^b.) und ist P_i irgend einer derselben, so verwandelt sich durch dieselbe Transformation das System (1.) in das folgende einfachere:

$$(2^c.)\qquad (u'_{i+1} \dots u'_n,\ P_i) \sim P_i,$$

denn in dem Systeme (2.) sind dann die Coefficienten von $u'_1, \dots, u'_i$ durch P_i theilbar, während diejenigen von $u'_{i+1}, \dots, u'_n$ zu P_i relativ prim sind; die m Congruenzen (1^a.) für den Modul P_i sind demnach dann und nur dann

*) Die hier anzuwendenden einfachen Umformungen stimmen im Wesentlichen mit denjenigen überein, welche Herr *Kronecker* in seiner Arbeit „Ueber symmetrische Systeme", Monatsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1889, Seite 349 angegeben hat.

erfüllt, wenn $u'_{i+1}, \ldots, u'_n$ durch P_i theilbar sind, während $u'_1, \ldots, u'_i$ völlig beliebige Werthe haben können.

Mit Hülfe dieser Eigenschaft der linearen Modulsysteme kann nun bewiesen werden, dass auch das im vorigen Abschnitt betrachtete Modulsystem:

$$(3.)\qquad (P^{\nu\delta}.U^{(\nu)}, P^{n\delta})$$

einem linearen Systeme äquivalent ist, unter der Voraussetzung, dass die homogene Form P keine gleichen Factoren enthält, und dass der bis jetzt unbestimmt gelassene Bruch δ ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{n}$, aber höchstens gleich Eins ist. Wir wollen diesen Beweis inductiv führen, indem wir annehmen, dass sich die Bedingung (3.) für $\delta = \frac{\varkappa-1}{n}$, d. h. die Aequivalenz:

$$(4.)\qquad (P^{\nu.\frac{\varkappa-1}{n}}U^{(\nu)}, P^{\varkappa-1}) \backsim P^{\varkappa-1}$$

auf lineare Congruenzen modulo P reduciren lässt, und dann den Nachweis führen, dass dasselbe für $\delta = \frac{\varkappa}{n}$, d. h. für

$$(4^a.)\qquad (P^{\nu.\frac{\varkappa}{n}}U^{(\nu)}, P^{\varkappa}) \backsim P^{\varkappa}$$

der Fall ist.

Angenommen nun, die Aequivalenz (4.) reducirt sich auf lineare Congruenzen modulo P, so kann man, wie oben gezeigt wurde, die Unbestimmten $u_1, \ldots, u_n$ durch eine lineare Substitution

$$(5.)\qquad u_i = \sum_k \alpha_{ik} u'_k,$$

deren Determinante $|\alpha_{ik}|$ zu P relativ prim ist, in neue Unbestimmte $u'_1, \ldots, u'_n$ so transformiren, dass sich die Bedingung (4.) auf eine Anzahl der einfacheren Aequivalenzen:

$$(5^a.)\qquad (u'_{\mu+1}, u'_{\mu+2}, \ldots, u'_n, P) \backsim P$$

reducirt, wo P einen derjenigen Theiler $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ bedeutet, in welche P in $(2^b.)$ zerlegt wurde. Alsdann kann man aber die Untersuchung für einen jeden dieser $n+1$ Theiler gesondert weiterführen, da ja offenbar eine algebraische Form dann und nur dann durch ein Product theilerfremder rationaler Formen theilbar ist, wenn dies für jeden seiner Factoren der Fall ist.

Wendet man ferner auf die bis jetzt untersuchte Form:

$$(6.)\qquad w = u_1\eta_1+\cdots+u_n\eta_n$$

die lineare Substitution (5.) an, wodurch sie in:

$$(6^a.)\qquad w = u'_1\eta'_1+\cdots+u'_n\eta'_n$$

übergehen möge, so entspricht einer jeden Lösung $(u_1, \ldots, u_n)$, modulo P betrachtet, eine und nur eine Lösung $(u'_1, \ldots, u'_n)$, da jene Substitution modulo P umkehrbar ist. Nennt man also:

$$N(w) = U'(u'_1, \ldots, u'_n)$$

die Form, in welche $U(u_1, \ldots, u_n)$ durch jene lineare Transformation übergeht, so ist für einen jeden Werth von δ:

$$(7.)\qquad (P^{\nu\delta}.U^{(\nu)}(u_1, \ldots, u_n), P^{n\delta}) \sim (P^{\nu\delta}.U'^{(\nu)}(u'_1, \ldots, u'_n), P^{n\delta}),$$

eine Aequivalenz, von deren Richtigkeit man sich auch auf rechnendem Wege leicht überzeugen kann. Man kann also die linken Seiten der *beiden* Aequivalenzen (4.) und (4^a.) durch die lineare Substitution (5.) transformiren, d. h. man kann von vorn herein an Stelle der Form (6.) die Form (6^a.) auf ihre Theilbarkeit untersuchen. Thut man dieses, und wählt man alsdann an Stelle des Moduls P irgend einen seiner $n+1$ Theiler $\bar{P}$, so reducirt sich die Bedingung (4.) auf die einfache Aequivalenz (5^a.). Durch sie wird aber ausgesprochen, dass jene Bedingung (4.) dann und nur dann erfüllt ist, wenn von den n Grössen $u'_1, \ldots, u'_n$ die letzten $n-\mu$ durch $\bar{P}$ theilbar sind, während $u'_1, \ldots, u'_\mu$ ganz beliebige Werthe haben können. Nimmt man nun von vorn herein die Grössen $u'_1, \ldots, u'_n$ auf ihren kleinsten Rest modulo $\bar{P}$ reducirt an, so sind sie nur dann durch $\bar{P}$ theilbar, wenn sie gleich Null sind. Erwägt man also, dass die Aequivalenz (4.) die Bedingungen dafür enthielt, dass die Form (6^a.) durch $P^{\frac{\varkappa-1}{n}}$ theilbar ist, so lässt sich jetzt die vorher gemachte Voraussetzung, dass die Bedingungen (4.) auf lineare Congruenzen zurückgeführt werden können, auch folgendermassen aussprechen:

(*A.*) Eine ganze algebraische Form $w = u'_1\eta'_1+\cdots+u'_n\eta'_n$ ist dann und nur dann durch $P^{\frac{\varkappa-1}{n}}$ theilbar, wenn ihre $(n-\mu)$ letzten Coefficienten gleich Null sind.

Es ist also jetzt nur noch zu untersuchen, wie die übrig bleibenden Coefficienten $u'_1, \ldots, u'_\mu$ zu wählen sind, damit die Form w nicht nur durch $P^{\frac{\varkappa-1}{n}}$, sondern auch durch $P^{\frac{\varkappa}{n}}$ theilbar ist. Die nothwendigen und hinreichenden

Bedingungen hierfür ergeben sich, wenn man in der Aequivalenz (4^a.) für die Grössen u_i die neuen Unbestimmten u'_i einführt, und alsdann $u'_{\mu+1}, \dots, u'_n$ gleich Null setzt, d. h. jene Bedingungen sind:

$$(8.)\qquad (\overline{P}^{\frac{\nu\varkappa}{n}} . U'^{(\nu)}(u'_1, \dots, u'_\mu), \overline{P}^{\varkappa}) \sim \overline{P}^{\varkappa},$$

und es ist jetzt nachzuweisen, dass auch diese Aequivalenz auf lineare Congruenzen zurückgeführt werden kann.

Dieser Beweis lässt sich nun durch ganz ähnliche Ueberlegungen führen, wie sie im vorigen Abschnitte zur Vereinfachung der Aequivalenz (6.) benutzt wurden. Zu diesem Zwecke beachte man, dass nach dem soeben ausgesprochenen Satze (A.) die Form:

$$w = v'_1 \eta'_1 + \dots + v'_\mu \eta'_\mu$$

für unbestimmte $v'_1, \dots, v'_\mu$ durch $\overline{P}^{\frac{\varkappa-1}{n}}$ theilbar ist. Ist also:

$$w = u'_1 \eta'_1 + \dots + u'_\mu \eta'_\mu$$

eine algebraische Form, deren Coefficienten der Bedingung (8.) genügen, welche also durch $\overline{P}^{\frac{\varkappa}{n}}$ algebraisch theilbar ist, so gilt dasselbe auch von:

$$w + \overline{P}^{\frac{1}{n}} \overline{w} = \Sigma (u'_i + \overline{P}^{\frac{1}{n}} v'_i) \eta'_i,$$

d. h. die obige Aequivalenz bleibt bestehen, wenn man in ihr allgemein:

$$u'_i \text{ ersetzt durch } u'_i + \overline{P}^{\frac{1}{n}} v'_i$$

und $v'_1, \dots, v'_\mu$ variable Grössen bedeuten lässt. Entwickelt man also die Functionen des so entstehenden Moduls:

$$(8^a.)\qquad (\overline{P}^{\frac{\nu\varkappa}{n}} U'^{(\nu)}(u'_i + \overline{P}^{\frac{1}{n}} v'_i), \overline{P}^{\varkappa}) \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\dots\mu)}$$

nach Producten von Potenzen von $v'_1, \dots, v'_\mu$, so muss ein jeder der Coefficienten durch $P^{\varkappa}$ theilbar sein. Diese Entwickelung jener Formen $U'^{(\nu)}$ lässt sich nun, ähnlich der entsprechenden im vorigen Abschnitte, abgesehen von Zahlencoefficienten, folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} U'^{(\nu)}(u'_i + \overline{P}^{\frac{1}{n}} v'_i) &= \sum_{\lambda=0}^{n-\nu} \overline{P}^{\frac{\lambda}{n}} \sum_{\varkappa_1 \dots \varkappa_\lambda} U'^{(\nu+\lambda)}(u'_1, \dots, u'_\mu) v'_{\varkappa_1} \dots v'_{\varkappa_\lambda} \\ &= \sum_{\nu_1=\nu}^{n} \overline{P}^{\frac{\nu_1-\nu}{n}} \sum_{\varkappa_i} U'^{(\nu_1)}(u'_1, \dots, u'_\mu) v'_{\varkappa_1} \dots v'_{\varkappa_{\nu_1-\nu}}, \end{aligned}$$

wo wieder $U'^{(\nu+\lambda)}$ jede der λten Ableitungen der Form $U'^{(\nu)}$ nach den in ihr auftretenden Unbestimmten bedeutet. Der aus den Entwickelungscoef-

ficienten von (8^a.) gebildete Modul, welcher dem in (8.) aufgestellten äquivalent ist, wird daher:

$$(\bar{P}^{\frac{\nu(\varkappa-1)}{n}}.\bar{P}^{\frac{\nu_1}{n}}.U'^{(\nu_1)}(u'_1,\ldots,u'_\mu),\bar{P}^\varkappa) \qquad \left(\begin{smallmatrix}\nu_1=0,1,\ldots n\\ \nu\leqq\nu_1\end{smallmatrix}\right).$$

Dieses Divisorensystem ist nun offenbar äquivalent dem einfacheren:

$$(\bar{P}^{\frac{\nu_1}{n}}.U'^{(\nu_1)}(u'_1,\ldots,u'_\mu),\bar{P}^\varkappa) \qquad (\nu_1=0,1,\ldots,n),$$

da ja alle Elemente des ersten Systems entweder selbst im zweiten vorkommen, oder aus ihnen durch Multiplication mit den positiven Potenzen $\bar{P}^{\frac{\nu(\varkappa-1)}{n}}$ entstehen. Die zu untersuchende Aequivalenz reducirt sich also auf die folgende:

$$(9.) \qquad (\bar{P}^{\frac{\nu_1}{n}}.U'^{(\nu_1)},\bar{P}^\varkappa)\sim\bar{P}^\varkappa \qquad (\nu_1=0,1,\ldots,n),$$

oder, was dasselbe ist, auf die Congruenzen:

$$(9^a.) \qquad \bar{P}^{\frac{\nu_1}{n}}.U'^{(\nu_1)}(u'_1,\ldots,u'_\mu)\equiv 0 \pmod{\bar{P}^\varkappa} \qquad (\nu_1=0,1,\ldots,n).$$

Von den Bedingungen (9^a.) können nun diejenigen fortgelassen werden, in welchen $\nu_1=n$ ist; schreibt man diese nämlich in der Form:

$$U'^{(n)}(u'_1,\ldots,u'_\mu)\equiv 0 \pmod{\bar{P}^{\varkappa-1}},$$

so erkennt man, dass sie von selbst erfüllt sind, weil $U'(u'_1,\ldots,u'_\mu)=N(w)$, also auch jede ihrer Ableitungen, nach der Voraussetzung (A.) für unbestimmte $u'_1,\ldots,u'_\mu$ durch $\bar{P}^{\varkappa-1}$ theilbar ist. Man braucht daher nur diejenigen Congruenzen weiter zu betrachten, in welchen der Exponent $\frac{\nu_1}{n}$ von $\bar{P}$ ein echter Bruch ist. Nun sind aber alle Ableitungen $U'^{(\nu_1)}$ homogene Formen von $u'_1,\ldots,u'_\mu$, deren Coefficienten *rationale* ganze Formen von x_1 und x_2 sind. Daher kann eine Form $U'^{(\nu_1)}$, multiplicirt mit der Potenz $\bar{P}^{\frac{\nu_1}{n}}$, deren Exponent ein echter Bruch ist, nur dann durch $\bar{P}^\varkappa$ theilbar sein, wenn $U'^{(\nu_1)}$ selbst jene Potenz von $\bar{P}$ enthält; die Congruenzen (9^a.) lassen sich also durch die einfacheren ersetzen:

$$U'^{(\nu_1)}(u'_1,\ldots,u'_\mu)\equiv 0 \pmod{\bar{P}^\varkappa} \qquad (\nu_1=0,1,\ldots,n-1),$$

und die Aequivalenz (9.) geht über in:

$$(10.) \qquad (U'^{(\nu_1)}(u'_1,\ldots,u'_\mu),\bar{P}^\varkappa)\sim\bar{P}^\varkappa \qquad (\nu_1=0,1,\ldots,n-1).$$

Die Formen $U'^{(\nu_1)}$ sind nun sämmtlich homogen in $u'_1,\ldots,u'_\mu$; nach dem bekannten *Euler*schen Satze lassen sie sich also sämmtlich homogen

und linear durch die $(n-1)$ten Ableitungen von U' darstellen, es ist nämlich, abgesehen von einem Zahlenfactor:

$$U'^{(\nu_1)}(u'_1, \dots, u'_\mu) = \Sigma U'^{(n-1)}(u'_1, \dots, u'_\mu) . u'_{x_1}, \dots, u'_{x_{n-\nu_1-1}};$$

daher können in der Aequivalenz (10.) alle Ableitungen von U' ausser den $(n-1)$ten fortgelassen werden, und hierdurch geht die zu untersuchende Aequivalenz in die folgende über:

$$(11.) \qquad (U'^{(n-1)}(u'_1, \dots, u'_\mu), \bar{P}^\varkappa) \sim \bar{P}^\varkappa.$$

Das dieser Aequivalenz entsprechende System von Congruenzen:

$$(11^a.) \qquad U'^{(n-1)}(u'_1, \dots, u'_\mu) \equiv 0 \pmod{\bar{P}^\varkappa}$$

besteht nun in der That nur aus linearen Congruenzen modulo $\bar{P}$; denn einmal sind ihre linken Seiten die $(n-1)$ten Ableitungen von $U'(u'_1, \dots, u'_\mu) = N(w)$, also lineare homogene Formen von $u'_1, \dots, u'_\mu$, dann aber ist nach dem Satze (*A.*) auf S. 19 $N(w)$, mithin auch jede ihrer Ableitungen für unbestimmte $u'_1, \dots, u'_\mu$ bereits durch $\bar{P}^{\varkappa-1}$ theilbar; die obigen Congruenzen reduciren sich also von selbst auf solche für den Modul $\bar{P}$.

Da somit die aufgestellte Behauptung für $\delta = \frac{\varkappa}{n}$ bewiesen ist, falls sie für $\delta = \frac{\varkappa-1}{n}$ als richtig angenommen wird, und da der Satz offenbar für $\delta = 0$ gilt, weil jede Form mit ganzen Coefficienten $u_1, \dots, u_n$ durch $\bar{P}^{\frac{0}{n}} = 1$ algebraisch theilbar ist, so besteht derselbe auch für $\delta = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$. Berücksichtigt man also die Form (11^a.), in welcher jene Theilbarkeitsbedingungen zuletzt erschienen, so lässt sich das gefundene Resultat in dem folgenden wichtigen Satze aussprechen:

Sind

$$\eta_1, \quad \dots, \quad \eta_n$$

ein beliebiges System von n homogenen ganzen algebraischen Formen, welche linear unabhängig sind, so ist die algebraische Form:

$$w = u_1\eta_1 + \dots + u_n\eta_n,$$

dann und nur dann durch eine ganze rationale Form $P(x_1, x_2)$ algebraisch theilbar, wenn die Coefficienten $u_1, \dots, u_n$ den linearen Congruenzen:

$$U^{(n-1)}(u_1, \ldots, u_n) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, P^n)$$

genügen, wenn also alle $(n-1)$ten Ableitungen von

$$N(w) = U(u_1, \ldots, u_n)$$

durch P^n theilbar sind.

VI.

Untersuchung der ganzen algebraischen Formen: ihre Darstellung durch ein Fundamentalsystem.

Mit Hülfe des am Ende des vorigen Abschnittes abgeleiteten Fundamentalsatzes kann man nun ein System von n linear unabhängigen ganzen algebraischen Formen ableiten, welches die Eigenschaft besitzt, dass alle ganzen algebraischen Formen und nur sie als homogene lineare Functionen von jenen dargestellt werden können, deren Coefficienten *ganze* homogene Formen von x_1 und x_2 sind. Ein solches System soll ein ***Fundamentalsystem*** genannt werden. Mit seiner Hülfe lassen sich die meisten bei der Untersuchung der algebraischen Functionen einer Klasse auftretenden Fragen in sehr einfacher Weise beantworten, wie später an den Hauptproblemen der Theorie der algebraischen Integrale näher dargelegt werden soll.

Wir gehen aus von irgend einem System linear unabhängiger ganzer algebraischer Formen

(1.) $$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \ldots, \quad \eta_n,$$

welche in Bezug auf (x_1, x_2, η) homogen und zwar von den Dimensionen

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \ldots, \quad \nu_n$$

sein sollen. Diese seien so angeordnet, dass:

(1ª.) $$\nu_1 \gtreqless \nu_2 \gtreqless \cdots \gtreqless \nu_n \quad \text{und} \quad \nu_n = 0$$

ist. Diesen Bedingungen wird z. B. genügt, wenn man wie vorher:

(1ᵇ.) $$\eta_i = \eta^{n-i-1}$$

annimmt. Dann ist nach dem soeben bewiesenen Satze eine ganze algebraische Form

$$w = u_1\eta_1 + \cdots + u_n\eta_n$$

dann und nur dann durch eine rationale ganze Form $P(x_1, x_2)$ ohne gleiche Factoren algebraisch theilbar, wenn ihre Coefficienten $u_1, \ldots, u_n$ den linearen Congruenzen:

(2.) $$\frac{\partial^{n-1}(N(w))}{\partial u_{x_1} \partial u_{x_2} \ldots \partial u_{x_{n-1}}} = U^{(n-1)}(u_1, \ldots, u_n) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, P^n)$$

genügen. Betrachtet man diese Congruenzen zunächst nur für den Modul P,

so folgt aus ihnen:

(3.) $$D u_i \equiv 0 \pmod{P},$$

wo D den grössten gemeinsamen Theiler aller derjenigen Determinanten $n$ter Ordnung bedeutet, welche aus dem Coefficientensystem der Linearformen $U^{(n-1)}$ gebildet werden können, und diese nothwendigen Bedingungen (3.) lehren, dass eine algebraische Form w nur dann durch eine rationale Form P theilbar sein kann, ohne dass alle Coefficienten selbst P enthalten, wenn P ein Theiler von $D(x_1, x_2)$ ist; diese und nur diese Formen sind somit noch weiter zu untersuchen.

Es sei nun P irgend ein Theiler der rationalen Form D, oder gleich das Product aller verschiedenen Factoren von D, so kann man durch eine lineare Transformation, deren Determinante zu P theilerfremd ist, die Unbestimmten $u_1, \ldots, u_n$ in andere $u'_1, \ldots, u'_n$ so transformiren, dass die linearen Congruenzen für den Modul P

(4.) $$U'^{(n-1)}(u'_1, \ldots, u'_n) \equiv 0 \pmod{P}$$

dann und nur dann befriedigt werden können, wenn:

(5.) $$u'_{\mu+1} \equiv u'_{\mu+2} \equiv \cdots \equiv u'_n \equiv 0 \pmod{\bar{P}}$$

ist, während $u'_1, \ldots, u'_\mu$ beliebige Werthe haben; die Form $\bar{P}$ bedeutet dann jeden der $n+1$ Theiler von P, in welche diese Form in (2ᵇ.) des vorigen Abschnittes zerlegt wurde. Untersucht man also zunächst die Form w in Bezug auf $\bar{P}$, und setzt man die Formen $u'_1, \ldots, u'_n$ bereits als auf ihren kleinsten Rest modulo $\bar{P}$ reducirt voraus, so müssen $u'_{\mu+1}, \ldots, u'_n$ gleich Null sein. Geht demnach durch die angegebene Transformation die Form w über in:

$$w = u'_1\eta'_1 + \cdots\cdots + u'_n\eta'_n,$$

so sind die nothwendigen Bedingungen (4.) für die Theilbarkeit von w durch $\bar{P}$ durch die Form:

$$w' = u'_1\eta'_1 + \cdots + u'_\mu\eta'_\mu$$

für unbestimmte $u'_1, \ldots, u'_\mu$ erfüllt und nur durch sie.

Bildet man jetzt alle $(n-1)$ten Ableitungen von

$$N(w') = U'(u'_1, \ldots, u'_\mu),$$

so sind diese, da sie einen Theil der Formen (4.) ausmachen, für unbestimmte $u'_1, \ldots, u'_\mu$ bereits durch $\bar{P}$ theilbar; das System der Congruenzen modulo $\bar{P}^2$

$$U'^{(n-1)}(u'_1, \ldots, u'_\mu) \equiv 0 \pmod{\bar{P}^2}$$

reducirt sich also thatsächlich auf ein solches modulo $\bar{P}$ und kann wiederum in der soeben angegebenen Weise behandelt werden.

Durch Fortsetzung desselben Verfahrens gelangt man schliesslich auf rationalem Wege durch blosse Auflösung einer Anzahl von linearen Congruenzen oder, was dasselbe ist, von linearen Gleichungen, für einen jeden Theiler P' von P zu einem Systeme von linear unabhängigen homogenen algebraischen Formen:

$$(6.)\qquad \eta'_1,\ \eta'_2,\ \ldots\ \eta'_m,$$

welche sämmtlich durch $P'(x_1, x_2)$ algebraisch theilbar sind, und durch welche sich jede andere P' enthaltende Form homogen und linear ausdrücken lässt.

Diese m algebraischen Formen sind durch das der Untersuchung zu Grunde gelegte System $\eta_1, \ldots, \eta_n$ in (1.) homogen und linear mit ganzen Coefficienten darstellbar; es sei nun

$$(6^a.)\qquad \eta'_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} \beta_{i\varkappa}\eta_\varkappa \qquad (i=1, \ldots m),$$

dann ist jeder der Coefficienten $\beta_{i\varkappa}$ eine homogene ganze Form von (x_1, x_2), deren Dimension diejenige des betreffenden $\eta_\varkappa$ zu der Dimension ν'_i von η'_i ergänzt; die Dimensionen der Coefficienten $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{in}$ einer beliebigen Zeile bilden also nach (1^a.) eine Reihe von ganzen Zahlen, deren jede gleich oder grösser als die vorhergehende ist.

Mit Hülfe der m Formen (6.) soll nun aus dem ursprünglichen Systeme (1.) von n unabhängigen Formen ein anderes abgeleitet werden, dessen Formen von möglichst niedriger Dimension sind. Die m Formen (6.) behalten offenbar alle vorher angegebenen Eigenschaften, wenn man jede mit irgend einer zu P' theilerfremden ganzen Form multiplicirt, oder auch, falls dies ausführbar ist, dividirt, wenn man ferner allgemein η'_i durch $\eta'_i - Q\eta'_\varkappa$ ersetzt, wo Q eine beliebige ganze rationale Form bedeutet, und wenn man endlich einen jeden Coefficienten auf seinen kleinsten Rest modulo P' reducirt. Betrachtet man nun die Veränderungen, welche durch diese Transformationen bei dem Coefficientensysteme

$$(7.)\qquad \begin{cases} \beta_{11}, & \beta_{12}, & \ldots, & \beta_{1n} \\ \beta_{21}, & \beta_{22}, & \ldots, & \beta_{2n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{m1}, & \beta_{m2}, & \ldots, & \beta_{mn} \end{cases}$$

der Gleichungen (6^a.) bewirkt werden, so entspricht die erste einer Multi-

plication, beziehlich einer Division der Elemente einer Horizontalreihe mit einer zu P' theilerfremden rationalen ganzen Form, die zweite einer linearen homogenen Verbindung zweier Horizontalreihen, und die dritte endlich besagt, dass die Coefficienten nur modulo P' betrachtet zu werden brauchen.

Offenbar kann man nun die rationale Form $P'(x_1, x_2)$ gleich in dem Sinne als irreductibel voraussetzen, dass sie in einer beliebig gegebenen Form des Coefficientensystems (7.) entweder ganz enthalten, oder zu ihr relativ prim ist. Sollte dies nämlich für irgend eine der Formen β_{ik} etwa nicht der Fall sein, so kann man ja durch das Euklidische Verfahren P' auf rationalem Wege in zwei Factoren zerlegen, von denen jeder die verlangte Eigenschaft hat, und für jeden von ihnen die weitere Untersuchung gesondert führen. Es sei nun die Form P' von der λten Dimension, und zwar werde zuerst angenommen, dass sie nicht gleich x_2 ist. Betrachtet man jetzt in dem Systeme (7.) die Elemente der ersten, zweiten, ... Verticalreihe, so muss man schliesslich zu einer Reihe gelangen, in welcher mindestens ein Element zu P' relativ prim ist. Sollten in derselben Colonne noch andere Formen vorhanden sein, welche dieselbe Eigenschaft besitzen, so kann man die Horizontalreihen in der Weise linear und homogen mit einander verbinden, dass in dem neuen äquivalenten System eine und nur eine Form dieser Verticalreihe zu P' theilerfremd ist, während alle anderen $P'(x_1, x_2)$ als Factor enthalten, und daher fortgelassen werden können. Macht man nun diese Horizontalreihe zur ersten und behandelt die übrig bleibenden Reihen in derselben Weise, so erhält man zuletzt ein Coefficientensystem, dessen Horizontalreihen mit Formen

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_m$$

anfangen, die zu P' relativ prim sind, und das aus dem Grunde ein ***Diagonalsystem*** genannt werden kann, weil die unter dem Anfangsgliede β_i einer jeden Zeile stehenden Elemente derselben Colonne sämmtlich gleich Null sind.

Hierauf multiplicire man die Horizontalreihen dieses Diagonalsystems beziehlich mit anderen Formen:

$$\beta'_1, \quad \beta'_2, \quad \ldots, \quad \beta'_m,$$

welche so gewählt sind, dass allgemein

$$\beta_i \beta'_i \equiv x_2^{\delta_i} \quad (\text{mod. } P')$$

ist; dadurch erhält man ein neues System, dessen Horizontalreihen beziehlich mit

$$x_2^{\delta_1}, \quad x_2^{\delta_2}, \quad \ldots, \quad x_2^{\delta_m}$$

anfangen; die späteren Elemente einer jeden Horizontalreihe sind dann nach der oben bei (6^a.) gemachten Bemerkung von höherer oder von gleicher Dimension als ihre Anfangsglieder. Reducirt man nun alle Formen dieses Systems modulo P' auf ihren kleinsten Rest, so sind sie in x_1 höchstens vom Grade $\lambda-1$, während ihre Dimensionen in (x_1, x_2) mindestens gleich der ihrer Anfangsglieder, d. h. beziehlich gleich

$$\delta_1, \quad \delta_2, \quad \ldots, \quad \delta_m$$

sind. Es tritt demnach aus allen Elementen der $i$ten Horizontalreihe eine Potenz von x_2 als gemeinsamer Factor heraus, deren Exponent mindestens gleich

$$\delta_i - (\lambda - 1)$$

ist; dividirt man also alle Elemente einer und derselben Horizontalreihe durch die ihnen gemeinsame Potenz von x_2, so verwandelt sich das obige Diagonalsystem in ein äquivalentes, dessen Reihen jetzt beziehlich mit den Potenzen

$$x_2^{\varepsilon_1}, \quad x_2^{\varepsilon_2}, \quad \ldots, \quad x_2^{\varepsilon_m} \tag{8.}$$

anfangen, deren Exponenten aber jetzt sämmtlich kleiner als die Dimension λ der Form P' sind.

Es seien nun

$$\eta_1'', \quad \eta_2'', \quad \ldots, \quad \eta_m'' \tag{9.}$$

die m unabhängigen durch P' theilbaren Formen, welche diesem transformirten Coefficientensysteme entsprechen, so sind sie mit den Formen (1.) durch m lineare Gleichungen von der folgenden einfachen Form verbunden:

$$(9^a.)\quad \begin{cases} \eta_1'' = x_2^{\varepsilon_1}\eta_{\varrho_1} + \gamma_{\varrho_1+1,1}\eta_{\varrho_1+1} + \cdots\cdots + \gamma_{n1}\eta_n, \\ \eta_2'' = \qquad x_2^{\varepsilon_2}\eta_{\varrho_2} + \cdots\cdots + \gamma_{n2}\eta_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \eta_m'' = \qquad x_2^{\varepsilon_m}\eta_{\varrho_m} + \cdots + \gamma_{nm}\eta_n. \end{cases}$$

Drückt man nun vermöge dieser Gleichungen die Elemente:

$$\eta_{\varrho_1}, \quad \eta_{\varrho_2}, \quad \ldots, \quad \eta_{\varrho_m}$$

durch die m algebraisch ganzen Formen:

$$\frac{\eta_1''}{P'}, \quad \frac{\eta_2''}{P'}, \quad \ldots, \quad \frac{\eta_m''}{P'}$$

aus, während die übrigen Formen des ursprünglichen Systems (1.) unge-

ändert bleiben, so erhält man ein neues System

$$(10.)\qquad \bar{\eta}_1,\ \bar{\eta}_2,\ \ldots,\ \bar{\eta}_n$$

von n linear unabhängigen ganzen algebraischen Formen; dieses geht aus dem ursprünglichen Systeme durch eine lineare Substitution hervor, deren Determinante offenbar den Werth

$$(11.)\qquad \frac{x_2^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_m}}{P'(x_1,x_2)^m}$$

besitzt, während ihre Substitutionscoefficienten homogene gebrochene Formen von (x_1, x_2) mit dem gemeinsamen Nenner $P'(x_1, x_2)$ sind. Untersucht man also die Formen (10.) in derselben Weise wie das System (1.), so erkennt man leicht, dass bei ihnen ausser den vorher gefundenen Formen $P'(x_1, x_2)$ höchstens noch x_2 als Nenner auftreten kann.

Durch Fortsetzung dieser Reductionen gelangt man nun schliesslich zu einem System von unabhängigen ganzen Formen, bei welchem überhaupt kein Nenner $P(x_1, x_2)$ mehr auftreten kann. Die Richtigkeit dieser Behauptung erkennt man leicht, wenn man die Gesammtdimension des ursprünglichen mit derjenigen des transformirten Systems (10.) vergleicht. Nach (1^a.) und (9^a.) sind diese nämlich beziehlich gleich:

$$\sum_1^n \nu_i \quad \text{und} \quad \sum_1^n \nu_i - \sum_1^m (\lambda - \varepsilon_k),$$

d. h. durch eine jede solche Transformation wird die Gesammtdimension um eine positive ganze Zahl, und zwar mindestens um m Einheiten erniedrigt; da nun die betrachteten Formen sämmtlich algebraisch ganz sind, so muss ihre Gesammtdimension eine ganze, nicht negative Zahl bleiben; nach einer endlichen Anzahl von Transformationen gelangt man somit zu einem Systeme, für welches bei keinem der überhaupt in Betracht kommenden Nenner $P'(x_1, x_2)$ eine Reduction eintritt, für welches also die Congruenzen (2.) überhaupt gar keine gemeinsamen Lösungen besitzen; es könnte nun noch die vorher ausgeschlossene Form x_2 als Nenner auftreten.

Um endlich auch diesen letzten Nenner fortzuschaffen, verfahre man genau wie früher, nur tritt in den Gleichungen (9^a.) x_1 an Stelle von x_2 auf, während die Exponenten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ sämmtlich gleich Null sind, da hier die Dimension λ von x_2 den Werth Eins hat. Nach Ausführung dieser

Reductionen, deren Determinanten nach (11.) gleich

$$\frac{1}{x_2^m}$$

sind, können also überhaupt gar keine weiteren Nenner auftreten; die aufgestellte Behauptung ist somit bewiesen.

Durch dieses Verfahren gelangt man also von einem beliebig gegebenen System

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \ldots, \quad \eta_n$$

von n linear unabhängigen ganzen algebraischen Formen auf rationalem Wege, nämlich durch blosse Auflösung linearer Gleichungen, zu einem anderen Systeme unabhängiger homogener Formen:

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \ldots, \quad \zeta_n,$$

welches die wichtige Eigenschaft besitzt, dass alle ganzen algebraischen homogenen Formen und nur sie eindeutig in der Form:

$$w = u_1\zeta_1+u_2\zeta_2+\cdots+u_n\zeta_n$$

mit homogenen ganzen Formen von x_1 und x_2 als Coefficienten dargestellt werden können; dieses System soll ein ***Fundamentalsystem*** für die betrachtete Gattung $\mathfrak{G}$ von algebraischen Formen genannt werden.

Es seien nun

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_n$$

die Dimensionen von

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \ldots, \quad \zeta_n,$$

und zwar sollen diese Formen wieder so geordnet angenommen werden, dass:

$$\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \cdots \geqq \mu_n \quad \text{und} \quad \mu_n = 0$$

ist; ferner sei:

$$N = \sum_1^n \mu_i$$

die Gesammtdimension des Fundamentalsystems, so ist N eine ganze positive Zahl, welche sicher gleich oder grösser als $n-1$ ist, da anderenfalls mindestens noch ζ_{n-1} von der nullten Dimension, also eine Constante sein müsste, was unmöglich ist, da ζ_{n-1} und ζ_n linear unabhängig sind. Setzt man nun

$$N = p+n-1,$$

so nennt man die ganze, nicht negative Zahl

$$p = N-(n-1)$$

das ***Geschlecht*** der Gattung $\mathfrak{G}$, welche durch die ursprüngliche Gleichung

$$f(y, x) = 0$$

definirt ist.

VII.

Untersuchung der algebraischen Formen für eine ganze rationale Form als Modul. Ihre Darstellung durch ein Fundamentalsystem.

Auch die modulo $P(x_1, x_2)$ ganzen algebraischen Formen können durch ein Fundamentalsystem dargestellt werden, und die Lösung dieser Aufgabe ist es, welche z. B. für die Zerlegung der algebraischen Grössen in ihre Primfactoren einzig und allein erforderlich ist. Die Aufstellung eines solchen Systems ist viel einfacher als die im vorigen Abschnitte durchgeführte, da es sich hier eben nur um die Untersuchung der Formen modulo P handelt.

Unter einem ***Fundamentalsystem für den Modul P*** verstehe ich ein System von n algebraischen Formen $\xi_1, \dots, \xi_n$, welche, modulo P betrachtet, algebraisch ganz und linear unabhängig sind, d. h. zwischen denen eine homogene lineare Congruenz:

$$(1.) \qquad w = u_1\xi_1 + \cdots + u_n\xi_n \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, P)$$

dann und nur dann besteht, wenn alle Coefficienten durch P theilbar sind. Aus dieser Definition ergiebt sich unmittelbar, dass das vorher betrachtete absolute Fundamentalsystem

$$(2.) \qquad \zeta_1, \ \dots, \ \zeta_n$$

auch für jeden Modul $P(x_1, x_2)$ ein solches ist, und ferner, dass jedes Fundamentalsystem aus irgend einem, etwa dem Systeme (2.) durch eine lineare Substitution

$$(3.) \qquad \begin{cases} \xi_i = \Sigma \alpha_{ik}\zeta_k, \\ \zeta_k = \Sigma A_{ik}\xi_i \end{cases}$$

hervorgeht, deren Coefficienten, modulo P betrachtet, ganze rationale Formen, und deren Determinante $|\alpha_{ik}|$ zu P relativ prim ist; denn allein eine solche Substitution ist, modulo P betrachtet, umkehrbar.

Ist endlich $\xi_1, \dots, \xi_n$ ein Fundamentalsystem für die Form P, so ergiebt sich aus der Darstellung (3.) der wichtige Satz, dass jede modulo P ganze Form w auf eine und nur auf eine Weise durch die Elemente desselben homogen und linear so dargestellt werden kann, dass die Coefficienten rationale homogene Formen von (x_1, x_2) sind, deren Nenner mit P keinen gemeinsamen Theiler haben.

Um nun von dem ursprünglichen Systeme

$$(4.) \qquad \eta^{n-1}, \ \eta^{n-2}, \ \dots, \ \eta, \ 1$$

in (1ᵃ.) des vorigen Paragraphen zu einem Fundamentalsystem für eine be-

liebige Form P ohne gleiche Factoren zu gelangen, braucht man nur alle linear unabhängigen Formen

$$w = u_{n-1}\eta^{n-1}+\cdots+u_1\eta+u_0$$

aufzusuchen, welche durch P algebraisch theilbar sind, eine Aufgabe, welche durch die Betrachtung der linearen Congruenzen (2.) des vorigen Abschnitts bereits gelöst wurde. Aus der dort gefundenen nothwendigen Bedingung (3.) ergiebt sich dann unmittelbar der Satz:

Das System (4.) ist für alle diejenigen Formen P ein Fundamentalsystem, welche zu $D(x_1, x_2)$ relativ prim sind. Es sind also nur noch für die Theiler dieser Form Fundamentalsysteme aufzustellen.

Ist nun P ein Theiler von D, so seien wie vorher

$$(5.) \qquad \eta'_1, \quad \eta'_2, \quad \ldots, \quad \eta'_m$$

alle linear unabhängigen Formen, welche noch durch P algebraisch theilbar sind. Dann kann man die Gleichungen:

$$\eta'_i = \Sigma\beta_{i\varkappa}\eta^{n-\varkappa-1},$$

vermöge deren diese durch das System (4.) ausgedrückt werden, benutzen, um m der Formen (4.) durch die modulo P ganzen Formen:

$$\frac{\eta'_1}{P}, \quad \ldots, \quad \frac{\eta'_m}{P}$$

und die übrigen Potenzen von η darzustellen. Untersucht man das so entstehende neue System in derselben Weise weiter, so gelangt man nach einer endlichen Zahl von Transformationen zu dem gesuchten Fundamentalsystem modulo P.

VIII.

Die algebraischen Formen erster Gattung.

Den ganzen algebraischen Formen am nächsten steht eine Klasse von gebrochenen Formen, deren Untersuchung für die Anwendungen der Theorie der algebraischen Functionen von grundlegender Bedeutung ist. Man wird zu ihnen durch die folgende Ueberlegung geführt.

Ist w zunächst eine beliebige *ganze* algebraische und $P(x_1, x_2)$ irgend eine rationale ganze homogene Form, so ist das Product

$$(1.) \qquad z = Pw$$

durch P algebraisch theilbar. Bildet man also die Gleichung

$$(2.) \qquad z^n+B_1z^{n-1}+B_2z^{n-2}+\cdots+B_n = 0,$$

der z genügt, so ist allgemein der Coefficient B_i durch P^i theilbar; diesen

Bedingungen wird ***für eine jede Form P*** offenbar dann und nur dann genügt, wenn w eine *ganze* algebraische Form ist, d. h. sie ist für die ganzen algebraischen Formen charakteristisch.

Legt man jetzt der algebraischen Form w die allgemeinere Bedingung auf, dass das Product $z = Pw$ für jedes P nicht mehr durch P selbst, wohl aber durch eine gebrochene positive Potenz P^{δ} dieser Form theilbar ist, deren Exponent beliebig klein sein kann, so gelangt man zu einem weiteren Gebiete algebraischer Formen, welches die ganzen Formen offenbar mit umfasst. Es sollen diese im Hinblick auf eine spätere Anwendung ***„Formen erster Gattung“*** genannt werden. Die gemeinsame charakteristische Eigenschaft der ganzen Formen und der Formen erster Gattung w lässt sich auch so aussprechen, dass das Product $z = Pw$ für eine jede Nullstelle der beliebig gewählten Form $P(x_1, x_2)$ stets verschwindet; ist aber w algebraisch ganz, so muss jenes Product durch P algebraisch theilbar sein, während dieses bei der zweiten Klasse von algebraischen Formen nicht für jedes P der Fall zu sein braucht.

Um nun alle algebraischen Formen erster Gattung wirklich zu finden, wollen wir ihre charakteristische Eigenschaft in einer für die Rechnung bequemeren Form angeben. Nach der oben gegebenen Definition sowie nach (5.) des vierten Abschnittes ist w dann und nur dann eine Form erster Gattung, wenn die Coefficienten $B_1, B_2, \ldots, B_n$ der Gleichung (2.) für $z = Pw$ so beschaffen sind, dass allgemein:

$$B_i \equiv 0 \pmod{P^{i\delta}} \tag{3.}$$

ist, falls δ eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet. Da nun die Formen B_i in (x_1, x_2) rational sind, so kann diesen Bedingungen, falls P keine gleichen Factoren besitzt, nicht genügt werden, wenn nicht mindestens

$$B_i \equiv 0 \pmod{P} \tag{3^a.}$$

ist. Dies ist aber andererseits die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass z durch $P^{\frac{1}{n}}$ theilbar ist, wie man leicht erkennt, wenn man in (3.) $\delta = \frac{1}{n}$ annimmt. Mit Rücksicht hierauf lässt sich die Definition der algebraischen Formen erster Gattung auch so aussprechen:

> Eine algebraische Form w ist dann und nur dann von der ersten Gattung, wenn ihr Product mit irgend einer rationalen Form $P(x_1, x_2)$ ohne gleiche Factoren mindestens durch $P^{\frac{1}{n}}$ theilbar ist.

Auf Grund dieser charakteristischen Eigenschaft der Formen erster Gattung

ist es nun leicht, alle diese Formen zu finden. Zu diesem Zwecke braucht man nur alle diejenigen ganzen algebraischen Formen

$$z = u_1\zeta_1+\cdots+u_n\zeta_n$$

aufzusuchen, welche durch $P^{\frac{1}{n}}$ theilbar sind, ohne dass ihre Coefficienten sämmtlich P enthalten. Damit aber z durch $P^{\frac{1}{n}}$ theilbar ist, ist das Bestehen der linearen Congruenzen:

$$(4.)\qquad \frac{\partial^{n-1}N(z)}{\partial u_{\varkappa_1}\partial u_{\varkappa_2}\dots\partial u_{\varkappa_{n-1}}} \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, P)$$

nothwendig und hinreichend, wie sich aus (29.) des fünften Abschnittes ergiebt, wenn man dort $\varkappa = 1$ setzt. Die vollständige Auflösung dieses Congruenzensystems ergiebt somit alle Formen erster Gattung.

Indessen gelangt man zu demselben Resultat viel einfacher vermittelst der folgenden Ueberlegung: Ist

$$z = u_1\zeta_1+\cdots+u_n\zeta_n$$

eine Form, welche durch $P^{\frac{1}{n}}$ theilbar ist, und bedeutet:

$$\bar{w} = v_1\zeta_1+\cdots+v_n\zeta_n$$

eine ganze algebraische Form mit unbestimmten Coefficienten, so ist offenbar auch:

$$(5.)\qquad Z = z\bar{w} = \sum_i\sum_\varkappa u_i v_\varkappa \zeta_i\zeta_\varkappa$$

für unbestimmte $v_1, \dots, v_n$ durch $P^{\frac{1}{n}}$ theilbar. Bildet man also die Gleichung, der Z für unbestimmte $v_1, \dots, v_n$ genügt, so müssen ihre Coefficienten sämmtlich durch P theilbar sein. Man kann nun diese grosse Anzahl von Bedingungen durch die eine ersetzen, dass nur der erste dieser Coefficienten, oder, was dasselbe ist, dass die Summe der n zu Z conjugirten Formen durch P theilbar sein, d. h. dass die Congruenz:

$$(6.)\qquad S(z\bar{w}) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, P)$$

für unbestimmte $v_1, \dots, v_n$ bestehen muss, wenn allgemein $S(w)$ die Summe der zu einer algebraischen Form w conjugirten Formen bedeutet. Diese Bedingung ist nothwendig, weil sie einen Theil der soeben ausgesprochenen bildet; ist sie ferner erfüllt, und setzt man an Stelle der Form $\bar{w}$ beziehlich:

$$(7.)\qquad \bar{w} = 1,\quad z,\quad z^2,\quad \dots,\quad z^{n-1},$$

so gehen aus ihr die folgenden n Congruenzen hervor:

$$(8.)\quad \left.\begin{array}{l} s_1 = S(z) \equiv 0, \\ s_2 = S(z^2) \equiv 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ s_n = S(z^n) \equiv 0, \end{array}\right\} \pmod{P},$$

wo $s_1, s_2, \ldots, s_n$ offenbar nichts anderes als die n ersten *Newton*schen Potenzsummen der algebraischen Form z sind. Ist also die Bedingung (6.) erfüllt, so sind auch

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_n$$

durch P theilbar. Erinnert man sich aber der Formeln, vermittelst deren jene Potenzsummen mit den Coefficienten

$$B_1, \quad B_2, \quad \ldots, \quad B_n$$

der Gleichung für z zusammenhängen, so ergiebt sich unmittelbar, dass alsdann auch alle jene Gleichungscoefficienten P enthalten, d. h. dass z durch $P^{\frac{1}{n}}$ algebraisch theilbar ist. Es ergiebt sich also das folgende Resultat:

Eine algebraische Form z ist dann und nur dann durch $P^{\frac{1}{n}}$ algebraisch theilbar, wenn die rationale Form:

$$S(z.\overline{w}) \equiv 0 \pmod{P}$$

ist, wo

$$\overline{w} = v_1\zeta_1 + \cdots + v_n\zeta_n$$

eine Form mit völlig unbestimmten Coefficienten bedeutet, und allgemein $S(u)$ die Summe der zu der algebraischen Form u conjugirten Formen, oder also den Coefficienten des zweithöchsten Gliedes in der Gleichung für u bedeutet.

Die linke Seite der Congruenz (6.) lässt sich nun folgendermassen schreiben:

$$S(\overline{w}z) = S(\sum_i \sum_\varkappa v_i u_\varkappa \zeta_i \zeta_\varkappa) = \sum_i \sum_\varkappa v_i u_\varkappa . S(\zeta_i \zeta_\varkappa).$$

Setzt man also:

$$S(\zeta_i . \zeta_\varkappa) = a_{i\varkappa},$$

wo die $a_{i\varkappa}$ dann ganze homogene Formen von (x_1, x_2) sind, so geht jene Bedingung über in die folgende:

$$(9.)\quad \sum a_{i\varkappa} v_i u_\varkappa \equiv 0 \pmod{P},$$

und diese vertritt, da sie für unbestimmte $v_1, \ldots, v_n$ erfüllt sein muss, die

Stelle der folgenden n linearen Congruenzen:

$$(10.)\qquad \Sigma a_{i\varkappa} u_\varkappa \equiv 0 \quad (\text{mod. } P).$$

Die n linearen Formen (10.) sind nun von einander unabhängig, d. h. ihre Determinante

$$\Delta = |a_{i\varkappa}|$$

ist nicht gleich Null. Wäre dies nämlich der Fall, so könnten die Linearformen (10.) durch nicht sämmtlich verschwindende Werthe von $u_1, \ldots, u_n$ zu Null gemacht werden, d. h. man könnte eine algebraische Form $z = u_1\zeta_1 + \cdots + u_n\zeta_n$ finden, deren Coefficienten nicht alle gleich Null sind, und für welche die Gleichung

$$S(z\bar{w}) = 0$$

für unbestimmte $v_1, \ldots, v_n$ erfüllt ist. Macht man dann aber wieder für $\bar{w}$ die Substitutionen (7.), so ergiebt sich wie oben, dass die *Newton*schen Potenzsummen, also auch sämmtliche Coefficienten der Gleichung für z gleich Null sein müssten, was nicht möglich ist, da die Form z selbst von Null verschieden ist.

Durch Auflösung der Congruenzen (10.) ergiebt sich nun:

$$\Delta u_\varkappa \equiv 0 \quad (\text{mod. } P),$$

d. h. jenen Bedingungen kann dann und nur dann durch Formen $u_1, \ldots, u_n$ genügt werden, welche nicht sämmtlich durch P theilbar sind, wenn P in Δ enthalten ist. Man braucht daher jene Congruenzen nur für den grössten Theiler $\bar{P}$ der Determinante Δ als Modul zu betrachten, welcher selbst keine gleichen Factoren besitzt. Die so sich ergebenden Congruenzen lassen sich als Gleichungen offenbar folgendermassen schreiben:

$$(10^a.)\qquad \sum_\varkappa a_{i\varkappa} u_\varkappa = \bar{P}.\bar{u}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wenn $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n$ beliebige ganze Formen bedeuten. Ist also allgemein:

$$(11.)\qquad A_{i\varkappa} = \frac{\dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{i\varkappa}}}{\Delta},$$

sind also die Formen $A_{i\varkappa}$ die Elemente des zu dem Systeme $|a_{i\varkappa}|$ reciproken Systems, so ergiebt sich die folgende Auflösung der Gleichungen (10^a.):

$$u_\varkappa = \bar{P}.\Sigma A_{i\varkappa}\bar{u}_i.$$

Setzt man endlich diese Werthe von $u_1, \ldots, u_n$ in die Form $z = \Sigma u_\varkappa \zeta_\varkappa$ ein,

so möge diese übergehen in:

$$z = \bar{P}.\Sigma\Sigma A_{i\kappa}\zeta_\kappa \bar{u}_i = \bar{P}.\Sigma\bar{u}_i\bar{\zeta}_i,$$

wo also die neu eingeführten algebraischen Formen $\bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n$ mit dem Fundamentalsystem $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ durch die folgenden Gleichungen zusammenhängen:

$$(12.) \qquad \bar{\zeta}_i = \sum_\kappa A_{i\kappa}\zeta_\kappa, \qquad \zeta_\kappa = \sum_i a_{i\kappa}\bar{\zeta}_i \qquad (i, \kappa = 1, 2, \ldots, n).$$

Hieraus ergiebt sich also, dass eine Form w dann und nur dann von der ersten Gattung ist, wenn $z = \bar{P}w$ sich so auf die Form:

$$\bar{P}w = \bar{P}\Sigma\bar{u}_i\bar{\zeta}_i$$

bringen lässt, dass die Coefficienten $\bar{u}_i$ ganze Formen von (x_1, x_2) sind. Die Lösung der in diesem Abschnitt gestellten Aufgabe kann hiernach in dem folgenden Fundamentalsatze ausgesprochen werden:

Alle Formen erster Gattung und nur sie lassen sich homogen und linear durch die n homogenen Functionen

$$(13.) \qquad \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \ldots, \bar{\zeta}_n$$

mit ganzen Formen von (x_1, x_2) als Coefficienten darstellen; jene n Functionen bilden also für die Formen erster Gattung ein Fundamentalsystem.

Für eine gleich zu gebende Anwendung ist es von Wichtigkeit, die Dimensionen

$$\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_n$$

der n Formen $\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \ldots, \bar{\zeta}_n$ zu bestimmen. Dies geschieht leicht mittels der folgenden Ueberlegung: Es seien

$$w = u_1\zeta_1 + \cdots + u_n\zeta_n,$$

$$\bar{w} = \bar{u}_1\bar{\zeta}_1 + \cdots + \bar{u}_n\bar{\zeta}_n$$

zwei Formen, deren Coefficienten die beiden Fundamentalsysteme für die ganzen Formen und für die Formen erster Gattung sind. Mit Hülfe der Gleichungen (12.) kann man deren Product folgendermassen schreiben:

$$w\bar{w} = \sum_{i,k} u_i\bar{u}_k\zeta_i\bar{\zeta}_k = \sum_{i,k,l} u_i\bar{u}_k A_{kl}\zeta_i\zeta_l;$$

berechnet man also die Form $S(w\bar{w})$, so ergiebt sich:

$$S(w\bar{w}) = \sum_{i,k} u_i\bar{u}_k A_{kl}a_{li} = \Sigma u_i\bar{u}_k\delta_{ik},$$

wo δ_{ik} wieder den Werth Eins oder Null hat, je nachdem die Indices i, k

gleich oder verschieden sind. Es besteht also die wichtige Gleichung:

$$(14.)\qquad S(w\bar{w}) = u_1\bar{u}_1+u_2\bar{u}_2+\cdots+u_n\bar{u}_n.$$

Es seien nun die Formen w und $\bar{w}$ beide von der nullten Dimension; dann sind die Coefficienten

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n \quad \text{und} \quad \bar{u}_1,\quad \bar{u}_2,\quad \ldots,\quad \bar{u}_n$$

homogene Formen von (x_1, x_2), deren Dimensionen beziehlich gleich

$$-\mu_1,\quad -\mu_2,\quad \ldots,\quad -\mu_n \quad \text{und} \quad -\mu'_1,\quad -\mu'_2,\quad \ldots,\quad -\mu'_n$$

sind, dann ist die linke und damit auch die rechte Seite der Gleichung (14.) eine rationale Form von der nullten Dimension. Ersetzt man also in dieser Gleichung (x_1, x_2) durch (tx_1, tx_2), so bleibt ihre rechte Seite ungeändert; es ergiebt sich somit

$$t^{-(\mu_1+\mu'_1)}u_1\bar{u}_1+\cdots+t^{-(\mu_n+\mu'_n)}u_n\bar{u}_n = u_1\bar{u}_1+\cdots+u_n\bar{u}_n,$$

und diese Bedingung ist für unbestimmte u_i und $\bar{u}_i$ dann und nur dann erfüllt, wenn allgemein

$$\mu'_i = -\mu_i$$

ist.

Sind also die Elemente eines absoluten Fundamentalsystems beziehlich von den Dimensionen

$$\mu_1,\quad \mu_2,\quad \ldots,\quad \mu_n,$$

so sind die Dimensionen der entsprechenden Elemente des Fundamentalsystems für die Formen erster Gattung beziehlich

$$-\mu_1,\quad -\mu_2,\quad \ldots,\quad -\mu_n.$$

IX.

Die algebraischen Integrale, insbesondere die Integrale erster Gattung.

Eine wichtige Anwendung der hier gefundenen Resultate bildet die Untersuchung der algebraischen Differentiale und Integrale. Es sei:

$$(1.)\qquad f(y, x) = 0$$

die in (1.) des zweiten Abschnittes betrachtete algebraische Gleichung zwischen y und x. Betrachtet man nun ein beliebiges algebraisches Integral

$$(2.)\qquad J = \int\varphi(x, y)dx,$$

und macht man dasselbe wieder durch die oben angegebenen **Substitutionen:**

$$(3.)\qquad x = \frac{x_1}{x_2}, \quad y = \frac{\eta}{A_0(x_1, x_2)}$$

homogen, so geht es über in

$$(4.)\qquad J = \int \varphi(x_1, x_2, \eta)\cdot \frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{x_2^2},$$

wo $\varphi(x_1, x_2, \eta)$ eine homogene algebraische Form der nullten Dimension ist; setzt man nun zur Abkürzung

$$(5.)\qquad \Phi(x_1, x_2, \eta) = \frac{\varphi(x_1, x_2, \eta)}{x_2^2},$$

so kann das betrachtete Integral folgendermassen geschrieben werden:

$$(6.)\qquad \int \Phi(x_1, x_2, \eta).(x_2 dx_1 - x_1 dx_2),$$

wenn $\Phi(x_1, x_2, \eta)$ eine algebraische Form der (-2)ten Dimension bedeutet.

Wir wollen jetzt die Integrale (6.) unter der allgemeineren Voraussetzung betrachten, dass Φ eine homogene Form von beliebiger Dimension ist, und speciell untersuchen, wie diese beschaffen sein muss, damit J für jeden Werth von x endlich und stetig ist. Ist dies der Fall, so nennt man J *ein Integral erster Gattung*. Hierzu ist bekanntlich nothwendig und hinreichend, dass für jeden Werth von x

$$(7.)\qquad dJ = \Phi(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)$$

unendlich klein ist.

Das Differential dJ lässt sich nun leicht so umformen, dass die angegebene nothwendige und hinreichende Bedingung in algebraischer Form erscheint. Zu diesem Zwecke betrachte man zwei beliebige ganze rationale Formen ohne gleiche Factoren:

$$P(x_1, x_2) \quad \text{und} \quad Q(x_1, x_2),$$

deren Dimensionen beziehlich gleich

$$\pi \quad \text{und} \quad \varkappa$$

sein mögen: sind dann

$$P_1,\; P_2 \quad \text{und} \quad Q_1,\; Q_2$$

ihre partiellen Ableitungen nach x_1 und x_2, so ergeben sich aus den bekannten Sätzen über homogene Formen die Gleichungen:

$$(8.)\qquad \begin{cases} P_1\, x_1 + P_2\, x_2 = \pi P, & Q_1\, x_1 + Q_2\, x_2 = \varkappa Q, \\ P_1 dx_1 + P_2 dx_2 = dP, & Q_1 dx_1 + Q_2 dx_2 = dQ. \end{cases}$$

Mit Hülfe der hieraus abgeleiteten Gleichung:

$$x_2 dx_1 - x_1 dx_2 = \frac{\varkappa Q dP - \pi P dQ}{P_1 Q_2 - Q_1 P_2}$$

lässt sich also der Ausdruck (7.) folgendermassen schreiben:

$$(9.) \qquad dJ = \Phi \cdot \frac{\varkappa Q dP - \pi P dQ}{P_1 Q_2 - Q_1 P_2}.$$

Es sei nun:

$$(10.) \qquad Q = u_1 x_1 + u_2 x_2,$$

wo u_1, u_2 unbestimmte, aber endliche Grössen bedeuten, dann geht der Nenner des Ausdrucks (9.) über in:

$$P_1 u_2 - P_2 u_1;$$

da nun die Ableitungen P_1 und P_2 keinen gemeinsamen Theiler besitzen, weil die Form P ohne gleiche Factoren vorausgesetzt wurde, so ist dieser Nenner bei der über u_1 und u_2 gemachten Voraussetzung für einen jeden Werth von x endlich und von Null verschieden, d. h. für jeden Werth von x können diese beiden Grössen als endliche Zahlen so bestimmt werden, dass jener Nenner endlich und von Null verschieden ist. Die oben angegebene Bedingung für J reducirt sich dann also darauf, dass das Product:

$$(11.) \qquad \Phi(Q dP - \pi P dQ) = (\Phi . dP) Q - (\Phi . P) . \pi dQ$$

unendlich klein ist, wenn $P(x_1, x_2)$ eine beliebige ganze Form ohne gleiche Factoren bedeutet.

Wir wollen den Ausdruck (11.) nun in der Umgebung einer der Nullstellen von $P(x_1, x_2)$ betrachten. Dann lässt sich P für kleine Werthe von t bekanntlich folgendermassen entwickeln:

$$P = t^{\lambda} \mathfrak{P}(t),$$

und demnach

$$P' = \frac{dP}{dt} = t^{\lambda-1} \mathfrak{P}_1(t),$$

wo $\mathfrak{P}(t)$ und $\mathfrak{P}_1(t)$ Potenzreihen von t sind, welche für kleine Werthe von t convergiren, und wo λ eine positive ganze Zahl bedeutet. Da nun Q und $Q' = \frac{dQ}{dt}$ für $t = 0$ beide nicht verschwinden, so beginnt die Entwicklung der beiden Terme auf der rechten Seite von (11.) mit verschiedenen Potenzen von t; der angegebenen Bedingung kann somit dann und nur dann genügt werden, wenn:

$$P\Phi \quad \text{und} \quad P'\Phi$$

beide für $t=0$ endliche Werthe besitzen. Beachtet man nun, dass der Quotient dieser beiden Formen:

$$\frac{P\Phi}{P'\Phi} = \frac{P}{P'} = t\cdot\frac{\mathfrak{P}(t)}{\mathfrak{P}_1(t)}$$

für $t=0$ verschwindet, ohne dass eine von ihnen unendlich gross ist, so ergiebt sich, dass der Zähler verschwinden muss.

Jener Bedingung wird hiernach dann und nur dann genügt, wenn die algebraische Form $P\Phi$ für jede Nullstelle von P verschwindet, wenn also $P\Phi$ mindestens durch $P^{\frac{1}{n}}$ theilbar ist. Da dasselbe nun für jede ganze rationale Form P der Fall sein muss, so ergiebt sich:

Das algebraische Integral

$$\int\Phi(x_2dx_1-x_1dx_2)$$

ist dann und nur dann von der ersten Gattung, wenn die algebraische Form Φ eine Form der ersten Gattung ist, d. h. wenn sich Φ in der Form

$$\Phi = \bar{u}_1\bar{\zeta}_1+\bar{u}_2\bar{\zeta}_2+\cdots+\bar{u}_n\bar{\zeta}_n$$

mit ganzen Formen von (x_1, x_2) als Coefficienten darstellen lässt.

Mit Hülfe der Gleichung (5.) ergiebt sich hiernach für φ die folgende Darstellung:

$$\varphi = x_2^2(\bar{u}_1\bar{\zeta}_1+\cdots+\bar{u}_n\bar{\zeta}_n), \tag{12.}$$

und zwar ist die Form $\varphi(x_1, x_2, \eta)$ dann und nur dann eine rationale Function von x und y, d. h. eine algebraische Function von x, wenn ihre Dimension gleich Null ist. Berücksichtigt man nun, dass die Formen $\bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n$ beziehlich von den Dimensionen $-\mu_1, \ldots, -\mu_n$ sind, so folgt, dass man alle Integrale erster Gattung und nur sie erhält, wenn man in dem Ausdruck (12.) von φ für die Coefficienten

$$\bar{u}_1, \quad \bar{u}_2, \quad \ldots, \quad \bar{u}_n$$

ganze Formen von (x_1, x_2) setzt, deren Coefficienten beliebige Constanten und deren Dimensionen beziehlich gleich

$$\mu_1-2, \quad \mu_2-2, \quad \ldots, \quad \mu_n-2$$

sind. Diesen Bedingungen kann nur dann durch nichtverschwindende Formen $\bar{u}_i$ genügt werden, wenn die entsprechende Dimension $\mu_i \geqq 2$ ist, und dann enthält die Form $\bar{u}_i$ genau μ_i-1 Terme. Dieses letzte Resultat

gilt auch dann noch, wenn etwa $\mu_i = 1$ sein sollte, d. h. es gilt nur nicht für μ_n, welches gleich Null ist.

Jeder Integrand erster Gattung kann hiernach als homogene lineare Function der Formen:

$$x_1^{\varrho_i} x_2^{\mu_i - \varrho_i} \bar{\zeta}_i = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\varrho_i} (x_2^{\mu_i} \bar{\zeta}_i) \qquad (\varrho_i = 0, 1, \ldots, \mu_i - 2)$$

mit constanten Coefficienten dargestellt werden. Setzt man also die n rationalen Functionen von x und y

$$(13.) \qquad x_2^{\mu_i} \bar{\zeta}_i = \varphi_i(x, y) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

so bilden die rationalen Functionen

$$(13^a.) \qquad x^{\varrho_i} \varphi_i(x, y) \qquad (\varrho_i = 0, 1, \ldots, \mu_i - 2)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Integranden erster Gattung. Die Anzahl derselben ist also:

$$(14.) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_i - 1) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i - (n-1) = N - (n-1) = p,$$

d. h. sie ist genau gleich dem Geschlechte der betrachteten Curve.

In der hier gegebenen Form ist dieser Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Integrale von den Herren *Dedekind* und *Weber* im § 26 ihrer wichtigen Abhandlung „Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen" (dieses Journal Band 92) in voller Allgemeinheit ausgesprochen und die Nothwendigkeit der Existenz von p linear unabhängigen Integralen erster Gattung durch geistvolle Betrachtungen bewiesen worden, welche auf einer Ausdehnung der *Kummer*schen Theorie der idealen Zahlen auf algebraische Functionen einer Variablen beruhen. Jedoch wird in dieser Arbeit einzig und allein die *Existenz* jener Integranden dargethan; zur wirklichen Darstellung derselben wäre nämlich nach jener Theorie einmal die Auffindung einer sogenannten *Basis* des betrachteten Körpers, dann aber die Darstellung einer *Normalbasis* unbedingt erforderlich; bei diesen beiden Aufgaben wird aber nur die Nothwendigkeit der Existenz einer Lösung bewiesen, aber kein zu ihr führender Weg angegeben, so dass mit Hülfe jener Untersuchungen in keinem Falle die Bestimmung des Geschlechtes wirklich gegeben und die Integranden erster Gattung gefunden werden können. Ausserdem ergiebt sich aus jener Untersuchung nicht, wie die Coefficienten jener p Integrale erster Gattung beschaffen sind, ob sie z. B. Wurzeln algebraischer Gleichungen, oder transcendente Grössen sind. Die Beantwortung dieser

Frage ist aber sehr wesentlich für die ganze Theorie, und sie muss deshalb nothwendig gestellt und in möglichst einfacher Weise gelöst werden, weil offenbar auch unendlich viele Systeme unabhängiger Integrale erster Gattung existiren, deren Coefficienten beliebige *transcendente* Functionen der Gleichungscoefficienten sind.

Durch die vorliegenden Untersuchungen werden nun diese beiden Aufgaben allein durch die Auflösung linearer Gleichungen, und zwar in einer Weise gelöst, welche sehr einfach auf specielle Probleme angewandt werden kann, wie in der nächsten Arbeit bei der Untersuchung einiger grossen Klassen algebraischer Curven dargelegt werden wird. Hierbei ergiebt sich, und ich glaube auf dieses Resultat besonderes Gewicht legen zu dürfen, dass man stets ein vollständiges System von linear unabhängigen Integranden erster Gattung finden kann, deren Coefficienten aus denjenigen der ursprünglichen Gleichung $f(x, y) = 0$ *rational* zusammengesetzt sind; sind also z. B. die Coefficienten jener Gleichung ganze Zahlen, so sind die p Functionen (13^a.) rationale Functionen von x und y mit ganzzahligen Coefficienten.

Ich möchte gleich an dieser Stelle erwähnen, dass man die hier gefundenen, sowie die auf die Zerlegung der Formen in ihre Primfactoren bezüglichen Resultate mit grosser Einfachheit aus der Theorie der bilinearen und der mit ihnen zusammenhängenden höheren homogenen Formen ableiten kann, und dass auch diese Art der Behandlung sowohl auf Zahlengleichungen, als auch auf Gleichungen mit beliebig vielen unabhängigen Variablen anwendbar bleibt. Ich werde dieses in einer demnächst erscheinenden Arbeit auszuführen versuchen.

Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Fortsetzung aus Band 108 Seite 256.

(Von Herrn *Paul Günther.*)

V.

In No. II meiner Notiz (dieses Journal Bd. 108 S. 256 ff.) habe ich gezeigt, wie man die zwischen zwei elliptischen Functionen (mit denselben Perioden)

$$(1.)\qquad x = \varphi(u),\quad y = \psi(u)$$

bestehende algebraische Gleichung bilden kann; sind $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ durch die *Hermite*sche Formel ausgedrückt:

$$(1^a.)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{k=0}^{l_i-1} A_{ik}\dfrac{d^k}{du^k}\dfrac{\sigma'(u-a_i)}{\sigma(u-a_i)}, \\ y = y_0 + \sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{k=0}^{l_i-1} B_{ik}\dfrac{d^k}{du^k}\dfrac{\sigma'(u-a_i)}{\sigma(u-a_i)}, \end{cases}$$

so kann man sie sofort in die Form

$$(1^b.)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{f_1(\wp u)+\wp' u . f_0(\wp u)}{L(\wp u)}, \\ y = \dfrac{g_1(\wp u)+\wp' u . g_0(\wp u)}{L(\wp u)} \end{cases}$$

setzen, wo die f_i, g_i und L ganze rationale Functionen von $\wp u$ bedeuten. Die Gleichungen (1^b.) liefern bei unmittelbarer Elimination von $\wp u$, $\wp' u$ eine Gleichung zwischen x und y, die von zu hohem Grade ist, deren fremde Theiler sich aber bestimmen lassen. Dabei zeigt sich, dass die Coefficienten der Gleichung $f(x, y) = 0$ dem Rationalitätsbereich

$$\left(x_0, y_0, A_{ik}, B_{ik}, \frac{\sigma' a_i}{\sigma a_i}, \wp a_i, \wp' a_i;\ i = 1, \dots s;\ k = 0, \dots l_{i-1}\right)$$

angehören.

Man kann nun (vergl. *Clebsch*, dieses Journal Bd. 64, S. 219 ff.) für u eine lineare Function $v = u - a$ derart einführen, dass, wenn man x und

y durch $\wp v$, $\wp' v$ ausdrückt und letztere Grössen eliminirt, sich unmittelbar die Gleichung $f(x, y) = 0$ ohne fremde Theiler ergiebt. Um diese neue Darstellung von x und y zu erhalten, reicht es offenbar nicht aus, die Ausdrücke von $\wp u$, $\wp' u$ durch $\wp v$, $\wp' v$ in (1^b.) einzusetzen; man kann aber durch folgendes Verfahren leicht zum Ziele gelangen.

Es sei m der Grad der beiden elliptischen Functionen x, y, d. h.

$$m = \sum_{i=1}^{s} l_i,$$

so werden für diese Functionen auch Ausdrücke von der Form

$$(2.) \qquad x = C_1 \cdot \frac{\prod_{k=1}^{m} \sigma(u-b_k)}{\prod_{i=1}^{s} \sigma^{l_i}(u-a_i)}, \qquad y = C_2 \cdot \frac{\prod_{k=1}^{m} \sigma(u-c_k)}{\prod_{i=1}^{s} \sigma^{l_i}(u-a_i)}$$

existiren, wo C_1, C_2 Constanten bedeuten und

$$(3.) \qquad \sum_{1}^{m} b_k = \sum_{1}^{m} c_k = \sum_{1}^{s} l_i a_i = m.a$$

ist. Führen wir dann mit *Clebsch*

$$v = u-a, \quad \alpha_i = a_i - a, \quad \beta_i = b_i - a, \quad \gamma_i = c_i - a$$

ein, so wird

$$(2^a.) \qquad x = C_1 \cdot \frac{\prod_{k=1}^{m} \sigma(v-\beta_k)}{\prod_{i=1}^{s} \sigma^{l_i}(v-\alpha_i)}, \qquad y = C_2 \cdot \frac{\prod_{k=1}^{m} \sigma(v-\gamma_k)}{\prod_{i=1}^{s} \sigma^{l_i}(v-\alpha_i)}$$

$$\left(\sum_{1}^{m} \beta_k = \sum_{1}^{m} \gamma_k = \sum_{1}^{s} \lambda_i \alpha_i = 0\right).$$

Sind nun $\varrho_1, \dots \varrho_m$ beliebige (nur von Null verschiedene) Grössen, deren Summe gleich 0 ist, so stellt

$$(4.) \qquad \Phi(u) = \frac{\prod_{i=1}^{m} \sigma(u-\varrho_i)}{\sigma^m u}$$

eine *elliptische* Function $m$ten Grades von u dar, die nur an der Stelle $u = 0$ unendlich wird; eine solche lässt sich aber immer in der Form

$$(4^a.) \qquad \Phi(u) = C_0 + C_1 \wp u + C_2 \wp' u + C_3 \wp'' u + \cdots + C_{m-1} \wp^{(m-2)} u$$

darstellen, wo $C_0, \dots C_{m-1}$ Constanten bedeuten. Dieselben müssen bis auf einen willkürlichen Factor durch die Grössen $\varrho_1, \dots \varrho_m$ bestimmt sein, wie es a priori einleuchtend ist; wir wollen indessen dies auch direct in Evidenz setzen, um ein Ergebniss dieser Untersuchung weiter unten zu benutzen.

Es seien die l_1 ersten Grössen ϱ_i etwa gleich u_1, die l_2 nächsten gleich $u_2, \ldots$, die l_s letzten gleich u_s, wo $u_1, \ldots u_s$ alle von einander verschieden sind und $\sum_1^s l_i = m$ ist. Dann sind $C_0, \ldots C_{m-1}$ zu bestimmen aus dem Gleichungssystem

$$(5.) \qquad \Phi^{(k)}(u_i) = 0 \qquad \begin{pmatrix} k=0, \ldots l_i-1 \\ i=1, \ldots s \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems wird erhalten, indem man, von der Determinante

$$\varDelta_m(v_1, \ldots v_m) = |\wp^{(i-1)}(v_h)| \qquad \begin{pmatrix} i=0, \ldots m-1 \\ h=1, \ldots m \\ \wp^{(-1)}(v_h) = 1 \end{pmatrix}$$

(wo $v_1, \ldots v_m$ Unbestimmte bedeuten) ausgehend, den Ausdruck

$$1!2!\ldots(l_1-1)!\,1!2!\ldots(l_2-1)!\ldots\lim\frac{\varDelta_m(u_1 v_2 \ldots v_{l_1} u_2 v_{l_1+2} \ldots)}{(v_2-u_1)(v_3-u_1)^2\ldots(v_{l_1}-u_1)^{l_1-1}(v_{l_1+2}-u_2)(v_{l_1+3}-u_2)^2\ldots}$$

$$(\text{für } v_2 = u_1, \quad v_3 = u_1, \quad \ldots \quad v_{l_1} = u_1, \quad \ldots \quad v_{l_1+2} = u_2, \quad v_{l_1+3} = u_2, \quad \ldots)$$

bildet.

Nun ist aber (vergl. *Hermite*, dieses Journal Bd. 82, S. 346, und *Schwarz*, Formelsammlung, S. 17)

$$\varDelta_m(v_1, \ldots v_m) = 1!2!\ldots(m-1)!\frac{\sigma(v_1+\cdots+v_m).\prod_{\lambda,\mu}\sigma(v_\lambda-v_\mu)}{\prod_{i=1}^{m}\sigma^m v_i} \qquad (\lambda>\mu;\ \lambda,\ \mu=1, \ldots m);$$

es wird also die fragliche Determinante bis auf einen Zahlenfactor gegeben durch

$$\frac{\sigma\left(\sum_1^s l_i u_i\right).\prod_{\lambda,\mu}[\sigma(u_\lambda-u_\mu)]^{l_\lambda \cdot l_\mu}}{\prod_{i=1}^{s}\sigma^{m.l_i} u_i} \qquad (\lambda>\mu;\ \lambda,\ \mu=1, \ldots s).$$

Hieraus folgt also, dass diese Determinante jedenfalls nicht verschwindet, wenn $\sum_1^s l_i u_i \neq 0$ ist (dies werden wir später zu benutzen haben); dagegen ist die Determinante gleich 0, wenn $\sum_1^s l_i u_i = 0$ ist. In letzterem Falle überzeugt man sich übrigens, dass nicht alle Unterdeterminanten $(m-1)$ten Grades verschwinden; man braucht hierzu nur von $\varDelta_{m-1}(v_1, \ldots v_{m-1})$, welches ja eine solche Unterdeterminante von $\varDelta_m(v_1, \ldots v_m)$ ist, auszugehen und ähnlich wie oben zu verfahren.

Damit ist gezeigt, dass die Grössen C_h in (4^a.) in der That bis auf einen willkürlichen Factor durch die $\varrho_1, \dots \varrho_m$ bestimmbar sind.

Dies vorausgesetzt, können wir die Gleichungen (2^a.) ersetzen durch

$$(2^b.) \qquad x = \frac{\Phi_1(v)}{\Phi_0(v)}, \quad y = \frac{\Phi_2(v)}{\Phi_0(v)},$$

wo Φ_0, Φ_1, Φ_2 die Form (4^a.) haben. Dabei sind die Coefficienten in $\Phi_0(v)$ bis auf einen ihnen allen gemeinsamen willkürlichen Factor sofort bestimmt durch die Gleichungen

$$\Phi_0^{(k)}(\alpha_i) = 0 \qquad \binom{k=0, \dots l_i-1}{i=1, \dots s};$$

sie ergeben sich als rationale Functionen der Grössen $\wp a_i$, $\wp' a_i$ $(i = 1, \dots s)$, $\wp a$, $\wp' a$.

Um die Coefficienten in Φ_1 und Φ_2 zu bestimmen, beachte man, dass die Werthe, welche x, y und ihre (l_h-1) ersten Ableitungen für $u = -a_h$ annehmen $(h = 1, \dots s)$, sich vermöge der Gleichungen

$$\frac{\sigma' 2a_h}{\sigma 2a_h} = 2.\frac{\sigma' a_h}{\sigma a_h} + \frac{1}{2}\frac{\wp'' a_h}{\wp' a_h},$$

$$\frac{\sigma'(a_h-a_k)}{\sigma(a_h-a_k)} = \frac{\sigma' a_h}{\sigma a_h} - \frac{\sigma' a_k}{\sigma a_k} + \frac{1}{2}\frac{\wp' a_h + \wp' a_k}{\wp a_h - \wp a_k}$$

rational durch die Grössen x_0, y_0, A_{ik}, B_{ik}, $\frac{\sigma' a_i}{\sigma a_i}$, $\wp a_i$, $\wp' a_i$ ausdrücken. Für die Coefficienten in Φ_1 und Φ_2 ergeben sich daher zwei Systeme linearer nicht homogener Gleichungen

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(k)}(-a_h-a) &= R_{hk}, \\ \Phi_2^{(k)}(-a_h-a) &= S_{hk} \end{aligned} \qquad \binom{k=0, \dots l_h-1}{h=1, \dots s},$$

deren Determinanten nach einer obigen Bemerkung nicht verschwinden (denn wir können immer voraussetzen, dass a nicht gleich Null ist); R_{hk} und S_{hk} gehören dabei dem zuletzt angegebenen, nur durch die Grössen $\wp a$ und $\wp' a$ zu erweiternden Rationalitätsbereich an. Letzteres gilt also auch von den Coefficienten in Φ_1, Φ_2; diese enthalten übrigens alle den in Φ_0 auftretenden unbestimmten Factor, der sich daher in x und y heraushebt.

Damit ist nun die Darstellung (2^b.) algebraisch bestimmt; wir können dieselbe offenbar in die Form

$$(6.) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{F_1(\wp v) + \wp' v . F_0(\wp v)}{H_1(\wp v) + \wp' v . H_0(\wp v)}, \\ y = \dfrac{G_1(\wp v) + \wp' v . G_0(\wp v)}{H_1(\wp v) + \wp' v . H_0(\wp v)} \end{cases}$$

setzen, wo F_0, G_0, H_0 ganze rationale Functionen vom Grade $\left[\frac{m-3}{2}\right]$, F_1, G_1, H_1 solche vom Grade $\left[\frac{m}{2}\right]$ bedeuten; in dieser Form entspricht sie der von *Clebsch* a. a. O. gegebenen.

Wir bemerken noch Folgendes: Wenn man, von einer *gegebenen* Gleichung vom Range 1

$$f(x, y) = 0 \tag{7.}$$

ausgehend, die *Clebsch*sche Parameterdarstellung (6.) herleiten will, so darf man stets voraussetzen, dass x und y als elliptische Functionen von u oder v nur *einfache* Unendlichkeitsstellen besitzen. Sei nämlich $x = x_1$ ein Werth, welchem vermöge der Gleichung (7.) lauter endliche und von einander verschiedene Werthe y, also auch lauter ungleiche Werthe u, entsprechen, so setze man

$$\xi = \frac{1}{x-x_1}, \quad \eta = \frac{y}{x-x_1};$$

dann haben ξ und η, zwischen denen ja eine Gleichung

$$F(\xi, \eta) = 0$$

besteht, nur einfache Unendlichkeitsstellen; wenn dann die *Clebsch*sche Parameterdarstellung für ξ und η gefunden ist, so ist auch die für x und y gegeben.

VI.

Von dem Vorhergehenden wollen wir noch einige sehr einfache Anwendungen machen auf die Theorie der durch ein solches Gleichungssystem $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$ bestimmten algebraischen Gleichungen oder, geometrisch gesprochen, der sogenannten *„ebenen elliptischen Curven“*. Dabei setzen wir voraus, dass φ und ψ nur einfache Unendlichkeitsstellen besitzen.

Ein *Doppelpunkt* der Curve ist dadurch bestimmt, dass es ein Werthepaar (w, w') giebt, für welches

$$\varphi(w) = \varphi(w'), \quad \psi(w) = \psi(w') \tag{1.}$$

ist. Die *Clebsch*sche Parameterdarstellung liefert in einfacher Weise algebraische Gleichungen für die entsprechenden Werthe von $\wp w$, $\wp' w$, $\wp w'$, $\wp' w'$ und zeigt zugleich die Existenz von $\frac{1}{2}m(m-3)$ Doppelpunkten (vergl. *Clebsch*, a. a. O. S. 224). Hierbei ist aber noch Folgendes zu beachten.

Es kann ja der Fall eintreten, dass die durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u), \quad f(x, y) = 0$$

gegebene Curve $m$ter Ordnung vom Range 0 ist; dann aber giebt es einen Theiler r von m, sodass identisch

$$f(x, y) = g(x, y)^r$$

ist, wo g wieder eine ganze rationale Function bedeutet (vergl. No. III); die Curve degenerirt also in diesem Falle in eine r-fach zu zählende Curve von der Ordnung $\frac{m}{r}$. Dann ist aber jeder Punkt der Curve als ein Doppel- oder mehrfacher Punkt anzusehen, und es müssen daher die zur Bestimmung der Doppelpunkte dienenden Gleichungen die Eigenschaft haben, für jeden Werth w eine Lösung w' zuzulassen. Ich begnüge mich, dies an dem Beispiel der Curven dritter Ordnung zu veranschaulichen.

Für diese lautet die *Clebsch*sche Parameterdarstellung

$$(2.)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a_{10}+a_{11}\wp v+a_{12}\wp' v}{a_{00}+a_{01}\wp v+a_{02}\wp' v}, \\[2ex] y = \dfrac{a_{20}+a_{21}\wp v+a_{22}\wp' v}{a_{00}+a_{01}\wp v+a_{02}\wp' v}. \end{cases}$$

Der Fall des Ranges 0 kann hier nur eintreten, wenn die Curve in eine dreifache Gerade ausartet; die Bedingung dafür ist, dass sich drei nicht sämmtlich verschwindende Grössen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ finden lassen, für welche identisch

$$\lambda_0(a_{00}+a_{01}\wp v+a_{02}\wp' v)+\lambda_1(a_{10}+a_{11}\wp v+a_{12}\wp' v)+\lambda_2(a_{20}+a_{21}\wp v+a_{22}\wp' v) = 0$$

ist, d. h.

$$(3.)\qquad |a_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 0, 1, 2).$$

Wenn nun $|a_{ik}| \neq 0$ ist, so haben die Gleichungen

$$(4.)\qquad a_{i0}+a_{i1}\wp w+a_{i2}\wp' w = q(a_{i0}+a_{i1}\wp w'+a_{i2}\wp' w') \qquad (i = 0, 1, 2)$$

nur die Lösung

$$q = 1, \quad w = w',$$

d. h. es existirt kein Doppelpunkt (wie es ja sein muss); während für $|a_{ik}| = 0$ die Gleichungen (4.) für *jeden* Werth w einen von w verschiedenen Werth w' liefern. — Ich bemerke noch beiläufig, dass die Bedingung (3.), wenn die Curve dritter Ordnung durch die Gleichungen

$$(2^a.)\qquad \begin{cases} x = x_0+\sum\limits_1^3 A_i \dfrac{\sigma'(u-a_i)}{\sigma(u-a_i)}, \\[2ex] y = y_0+\sum\limits_1^3 B_i \dfrac{\sigma'(u-a_i)}{\sigma(u-a_i)} \end{cases} \qquad \left(\sum_1^3 A_i = \sum_1^3 B_i = 0\right)$$

gegeben ist, durch

$$(3^a.)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = 0$$

zu ersetzen ist. —

Der Doppelpunkt (w, w') geht bekanntlich in einen ***Rückkehrpunkt*** über, wenn w' gegen w convergirt; die Parameter w der Rückkehrpunkte sind hiernach die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen

$$(5.)\qquad \varphi'(w) = 0, \quad \psi'(w) = 0.$$

(Vergl. auch *O. Schlesinger,* Math. Ann. Bd. 33, S. 466.) Um diese Lösungen zu finden, leite man nach No. II oder Gleichung (6.), No. V, die zwischen $\wp w$ einerseits und $\varphi'(w)$, bezw. $\psi'(w)$ andererseits bestehenden algebraischen Gleichungen

$$S_0(\wp w).\varphi'^2(w)+S_1(\wp w).\varphi'(w)+S_2(\wp w) = 0,$$
$$T_0(\wp w).\psi'^2(w)+T_1(\wp w).\psi'(w)+T_2(\wp w) = 0$$

her; ist dann $R(\wp w)$ der grösste gemeinsame Theiler von S_2, T_2, so müssen die Werthe von $\wp w$ an den Rückkehrpunkten unter den Wurzeln der Gleichung

$$R = 0$$

enthalten sein. Für die zugehörigen Werthe von $\wp' w$ ergeben sich, jenachdem man die erste oder die zweite der Gleichungen (5.) nimmt, zwei verschiedene Ausdrücke

$$\wp' w = R_1(\wp w), \quad \wp' w = R_2(\wp w)$$

(R_1, R_2 rationale Functionen); und es liefern nun nur diejenigen Wurzeln der Gleichungen $R = 0$ Rückkehrpunkte, für welche $R_1 = R_2$ ist. Wir bezeichnen die Parameter der Rückkehrpunkte mit $v_1, \dots v_\varrho$.

Die ***Gleichung der Curve in Liniencoordinaten***

$$F(X, Y) = 0$$

ist durch ihre Parameterdarstellung

$$(6.)\qquad X = -\frac{\psi'(u)}{D(u)}, \quad Y = \frac{\varphi'(u)}{D(u)},$$

wo

$$D(u) = \varphi(u)\psi'(u)-\varphi'(u)\psi(u),$$

gegeben (*Hermite,* a. a. O. S. 345; *O. Schlesinger,* a. a. O. S. 467). Hier

wird $D(u)$ nur unendlich an den Stellen a_i, und zwar von der zweiten Ordnung, ebenso $\varphi'(u)$ und $\psi'(u)$; ferner haben diese drei Functionen die gemeinsamen Nullstellen $v_1, \dots v_\varrho$. Daher sind X, Y elliptische Functionen vom Grade $2m-\varrho$, und diese Zahl giebt also die *Klasse* der Curve an.

Die *Wendepunkte* werden geliefert durch

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

für sie ist also

$$W(u) = \varphi'(u)\psi''(u) - \varphi''(u)\psi'(u) = 0. \tag{7.}$$

Die Function $W(u)$ wird nur an den Stellen a_i unendlich, und zwar von der dritten Ordnung; sie hat also $3m$ Nullstellen. Aber $W(u)$ und $\frac{dW(u)}{du}$ verschwinden für $u = v_1, \dots v_\varrho$; es bleiben also nur $3m-2\varrho$ Wendepunkte, deren algebraische Bestimmung nach dem Obigen leicht ausgeführt werden kann.

Für die Curven dritter Ordnung lautet die Wendepunktsgleichung, wenn wir die Darstellung (2^a.) zu Grunde legen:

$$\begin{vmatrix} \sum_1^3 A_i \wp(u-a_i) & \sum_1^3 B_i \wp(u-a_i) \\ \sum_1^3 A_i \wp'(u-a_i) & \sum_1^3 B_i \wp'(u-a_i) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} 3 & \sum_1^3 A_i & \sum_1^3 B_i \\ \sum_1^3 \wp(u-a_i) & \sum_1^3 A_i \wp(u-a_i) & \sum_1^3 B_i \wp(u-a_i) \\ \sum_1^3 \wp'(u-a_i) & \sum_1^3 A_i \wp'(u-a_i) & \sum_1^3 B_i \wp'(u-a_i) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \wp(u-a_1) & \wp(u-a_2) & \wp(u-a_3) \\ \wp'(u-a_1) & \wp'(u-a_2) & \wp'(u-a_3) \end{vmatrix} = 0$$

(*Hermite*, a. a. O. S. 346).

Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit.

(Von Herrn *Fritz Kötter*.)

§ 1.

Die Differentialgleichungen des Problems.

Die Lage eines festen Körpers im Raume ist völlig bestimmt durch die Lage eines mit ihm fest verbundenen rechtwinkligen Coordinatensystems zu einem eben solchen im Raume festen System, d. h. durch die Coordinaten ξ, η, ζ für den Anfangspunkt O des ersteren in dem zweiten, und durch die neun Richtungscosinus der drei im Körper festen Axen, welche wir als X-, Y-, Z-Axe bezeichnen, zu den drei im Raume festen Axen, welche Ξ-, H-, Z-Axe heissen sollen. Ein Bewegungszustand des Körpers ist bestimmt durch die drei Geschwindigkeitscomponenten des Punktes O nach den drei im Körper festen Axen und die drei Componenten der Rotationsgeschwindigkeit des Körpers, genommen nach denselben Axen. Wir nennen die letztgenannten sechs Grössen u, v, w, p, q, r; die Bezeichnung der Richtungscosinus wird aus der folgenden Tabelle hervorgehen:

	X	Y	Z
Ξ	α_1,	α_2,	α_3,
H	β_1,	β_2,	β_3,
Z	γ_1,	γ_2,	γ_3.

Zwischen den 18 bezeichneten Grössen bestehen zwölf allgemein gültige Differentialgleichungen:

$$(1^a.)\ \begin{cases} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_3 q - \alpha_2 r, \\ \dfrac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_1 r - \alpha_3 p, \\ \dfrac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_2 p - \alpha_1 q, \end{cases} \quad (1^b.)\ \begin{cases} \dfrac{d\beta_1}{dt} = \beta_3 q - \beta_2 r, \\ \dfrac{d\beta_2}{dt} = \beta_1 r - \beta_3 p, \\ \dfrac{d\beta_3}{dt} = \beta_2 p - \beta_1 q, \end{cases} \quad (1^c.)\ \begin{cases} \dfrac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_3 q - \gamma_2 r, \\ \dfrac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_1 r - \gamma_3 p, \\ \dfrac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_2 p - \gamma_1 q, \end{cases}$$

$$
(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = u\alpha_1 + v\alpha_2 + w\alpha_3, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = u\beta_1 + v\beta_2 + w\beta_3, \\ \dfrac{d\zeta}{dt} = u\gamma_1 + v\gamma_2 + w\gamma_3. \end{cases}
$$

Hierzu kommen sechs weitere Gleichungen, welche die auf den Körper wirkenden Componentensummen und Drehungsmomente in Bezug auf die im Körper festen Axen durch die Grössen u, v, w, p, q, r und deren Ableitungen nach t ausdrücken.

Bewegt sich der Körper in einer Flüssigkeit, so setzen sich die Componentensummen und Drehungsmomente aus zwei Theilen zusammen, nämlich einem von den gegebenen äusseren Kräften herrührenden Theile und einem anderen, welcher den von der Flüssigkeit ausgeübten und durch deren Bewegungszustand bedingten Druckkräften entstammt. Demgemäss zerfällt das Problem der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit in zwei Theile, von denen der erste in der Ableitung der Bewegung der flüssigen Masse aus einem gegebenen Anfangszustand für die allgemeinste Bewegung des festen Körpers besteht, während der andere aus den so gewonnenen Gleichungen die 18 Bestimmungsstücke als Functionen der Zeit abzuleiten hätte.

Haben wir es mit einer incompressiblen, reibungslosen Flüssigkeit zu thun, deren Gebiet einfach zusammenhängend ist und sich nach allen Seiten ins Unendliche erstreckt, ist ferner der Anfangszustand wirbelfrei und ruht die Flüssigkeit im Unendlichen, besitzen endlich die auf die Flüssigkeit wirkenden äusseren Kräfte ein Potential, so lässt sich die allgemeine Form der noch fehlenden Differentialgleichungen für die Bewegung des Körpers angeben, ohne dass der eigentlich hydrodynamische Theil des Problems gelöst wäre. Es ist dies um so wesentlicher, als bisher der letztere selbst unter den eben erwähnten erleichternden Voraussetzungen im Grunde nur für das Ellipsoid erledigt ist.

Macht man die oben aufgeführten Annahmen, so sind die Componenten der Geschwindigkeit eines flüssigen Theilchens mit den Coordinaten x, y, z nach den Axen X, Y, Z die Ableitungen des Geschwindigkeitspotentials φ nach x, y, z. Dieses Potential genügt der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0,$$

verschwindet im Unendlichen und hat eine Grenzbedingung zu erfüllen, welche ausdrückt, dass ein an der Oberfläche des festen Körpers befindliches Flüssigkeitstheilchen sich von derselben nicht entfernt; dieselbe lautet:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = (u+yr-zq)\cos nx+(v+zp-xr)\cos ny+(w+xq-yp)\cos nz.$$

Man sieht ohne weiteres, dass sich die Bestimmung von φ auf sechs Specialfälle zurückführen lässt. Hat man nämlich die sechs speciellen Functionen bestimmt, welche an der Oberfläche des Körpers den Bedingungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} &= \cos(nx), & \frac{\partial\varphi_4}{\partial n} &= z\cos(ny)-y\cos(nz),\\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} &= \cos(ny), & \frac{\partial\varphi_5}{\partial n} &= x\cos(nz)-z\cos(nx),\\
\frac{\partial\varphi_3}{\partial n} &= \cos(nz), & \frac{\partial\varphi_6}{\partial n} &= y\cos(nx)-x\cos(ny)
\end{aligned}$$

genügen, so erhält man φ durch die Gleichung:

$$\varphi = u\varphi_1+v\varphi_2+w\varphi_3+p\varphi_4+q\varphi_5+r\varphi_6.$$

Das heisst aber nichts anderes, als dass die Componenten der Geschwindigkeit irgend eines Flüssigkeitstheilchens ganze homogene lineare Functionen von u, v, w, p, q, r sind, deren Coefficienten in einer lediglich durch die Gestalt des Körpers bedingten Weise ausschliesslich von den Coordinaten x, y, z abhängen. Daher muss die lebendige Kraft der flüssigen Masse eine ganze homogene quadratische Function der sechs Grössen u, v, w, p, q, r sein, deren Coefficienten constante, nur von der Gestalt des festen Körpers abhängige Grössen sind. In Folge dieses Umstandes ist man einer besonderen Berechnung der von der Flüssigkeit auf den Körper ausgeübten Druckkräfte überhoben und kann nach *G. Kirchhoffs**) Vorgang zur Ermittelung der Differentialgleichung für die Bewegung des Körpers *Hamiltons* Princip genau wie bei der Bewegung im leeren Raum anwenden**). Ist T die ganze homogene quadratische Function von u, v, w, p, q, r, welche die lebendige Kraft des ganzen Systems darstellt, sind X, Y, Z die Componentensummen, M_x, M_y, M_z die Drehungsmomente aller wirken-

*) Dieses Journal Bd. 71, S. 237—262.

**) Vergl. *C. Neumann*, Hydrodynamische Untersuchungen. Leipzig 1883.

den äusseren Kräfte, so erhält man auf dem bezeichneten Wege die folgenden Differentialgleichungen:

$$(3.)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) = q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v} + X, & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) = q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} + v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + M_x, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) = r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w} + Y, & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) = r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} + w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + M_y, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right) = p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u} + Z, & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) = p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} + u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + M_z. \end{cases}$$

§ 2.

Die mechanische Bedeutung der Grössen $\frac{\partial T}{\partial u}, \frac{\partial T}{\partial v}, \frac{\partial T}{\partial w}, \frac{\partial T}{\partial p}, \frac{\partial T}{\partial q}, \frac{\partial T}{\partial r}$ und die allgemeinen Integrale für den Fall, dass keine Kräfte wirken.

Befindet sich der Körper zur Zeit t_0 in Ruhe, so folgen aus den Differentialgleichungen unmittelbar folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \int_{t_0}^{t}\left(q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v}\right)dt + \int_{t_0}^{t} X\,dt,$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \int_{t_0}^{t}\left(q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} + v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v}\right)dt + \int_{t_0}^{t} M_x\,dt, \quad \text{etc.}$$

Je kleiner nun das Zeitintervall von t_0 bis t wird, ohne dass die Grössen $\int_{t_0}^{t} X\,dt$, $\int_{t_0}^{t} M_x\,dt$ ihre Werthe ändern, desto weniger werden die ersten Integrale auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichungen gegen die zweiten in Betracht kommen. Daraus folgt, dass die Grössen

$$(4.)\quad \begin{cases} x_1 = \frac{\partial T}{\partial u}, & x_2 = \frac{\partial T}{\partial v}, & x_3 = \frac{\partial T}{\partial w}, \\ y_1 = \frac{\partial T}{\partial p}, & y_2 = \frac{\partial T}{\partial q}, & y_3 = \frac{\partial T}{\partial r} \end{cases}$$

die Componentensummen und Drehungsmomente desjenigen impulsiven Kraftsystems sind, welches den durch u, v, w, p, q, r dargestellten Bewegungszustand hervorzurufen vermag.

Nun kann man aber einen derartigen Impuls zerlegen in eine impulsive Einzelkraft und in ein impulsives Kräftepaar, dessen Ebene senkrecht zur Richtung der Einzelkraft liegt. Wirken keine äusseren Kräfte, so muss die eben bezeichnete Darstellung des Impulses ebenso wie die

lebendige Kraft des ganzen Systems unabhängig von der Zeit sein*). Wählen wir die Wirkungslinie der impulsiven Einzelkraft oder, falls die letztere gleich Null ist, irgend eine zur Ebene des Kräftepaares senkrechte Linie zur Ξ-Axe, so erhalten wir hieraus in dem bezeichneten Falle die folgenden Integralgleichungen

$$(5.)\quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial u}\alpha_1+\frac{\partial T}{\partial v}\alpha_2+\frac{\partial T}{\partial w}\alpha_3=J, & \frac{\partial T}{\partial p}\alpha_1+\frac{\partial T}{\partial q}\alpha_2+\frac{\partial T}{\partial r}\alpha_3=J_1, \\ \frac{\partial T}{\partial u}\beta_1+\frac{\partial T}{\partial v}\beta_2+\frac{\partial T}{\partial w}\beta_3=0, & \frac{\partial T}{\partial p}\beta_1+\frac{\partial T}{\partial q}\beta_2+\frac{\partial T}{\partial r}\beta_3=J\zeta, \\ \frac{\partial T}{\partial u}\gamma_1+\frac{\partial T}{\partial v}\gamma_2+\frac{\partial T}{\partial w}\gamma_3=0, & \frac{\partial T}{\partial p}\gamma_1+\frac{\partial T}{\partial q}\gamma_2+\frac{\partial T}{\partial r}\gamma_3=-J\eta, \\ \qquad 2T=L, \end{cases}$$

wo J und J_1 die Intensitäten der impulsiven Einzelkraft und des impulsiven Kräftepaares, L die doppelte lebendige Kraft bezeichnet. Nimmt man hierzu die sechs allgemein gültigen Relationen zwischen den neun Richtungscosinus, so hat man im ganzen 13 Integrale der 18 in Frage stehenden Differentialgleichungen.

Schon *Kirchhoff* hat hervorgehoben, dass die Bestimmung der Grössen ξ, η, ζ und der neun Richtungscosinus nur noch Quadraturen erfordert, sobald die sechs Grössen u, v, w, p, q, r als Functionen der Zeit ermittelt sind, oder anders gesprochen, sobald die sechs Gleichungen

$$(3^a.)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)=q\frac{\partial T}{\partial w}-r\frac{\partial T}{\partial v},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)=q\frac{\partial T}{\partial w}-p\frac{\partial T}{\partial v}+v\frac{\partial T}{\partial w}-w\frac{\partial T}{\partial v}$$

etc. integrirt sind. Da in diesen Gleichungen t selbst nicht vorkommt, so muss es offenbar fünf von t freie von einander unabhängige Integrale geben. Sind dieselben bekannt, so erhält man t durch eine blosse Quadratur. *Clebsch* hat darauf hingewiesen**), dass sich auf die fünf Gleichungen, welche man durch Elimination von dt erhält, *Jacobis* Theorem vom letzten Multiplicator anwenden lässt, sodass man nur vier von t freie Integrale zu kennen braucht, um das fünfte durch eine blosse Quadratur zu finden.

Drei Integrale der sechs in Frage stehenden Gleichungen (3ª.) erhält man aus (5.), indem man die Richtungscosinus eliminirt; sie lauten:

---

*) *Minkowski*. Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Sitzungsber. der Berl. Akademie 1888, S. 1095—1110.

**) Mathematische Annalen, Bd. III, S. 238—262.

$$(6.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = J^2, \\ \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial p}+\frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial T}{\partial r} = JJ_1, \\ 2T = L. \end{cases}$$

Man braucht also nur noch ein von t freies Integral aufzufinden, um das ganze Problem auf blosse Quadraturen zurückzuführen.

§ 3.

Ueber Fälle, in denen ein viertes von t freies Integral bisher aufgefunden ist. Formulirung des im Folgenden behandelten Problems.

Da man ein viertes allgemeines Integral bisher nicht ermittelt hat, so versuchte man, ein solches Integral wenigstens unter gewissen Annahmen über Gestalt und Massenvertheilung des festen Körpers abzuleiten. Diese Annahmen haben wesentlich den Zweck, den Ausdruck für die lebendige Kraft des Systems zu vereinfachen und so die Behandlung des Problems zu erleichtern.

Besitzt z. B. der Körper sowohl in Bezug auf seine Gestalt als auch in Bezug auf die Massenvertheilung zwei Paare senkrecht auf einander stehender Symmetrieebenen mit gemeinsamer Schnittlinie, so kann man dadurch, dass man den Anfangspunkt passend auf der Symmetrieaxe wählt und dass man die X-Axe mit der letzteren zusammenfallen lässt, der lebendigen Kraft die Form

$$T = \tfrac{1}{2}(Au^2+B(v^2+w^2)+Pp^2+Q(q^2+r^2))$$

geben. In diesem schon von *Kirchhoff* durchgeführten Falle wird

$$\frac{dPp}{dt} = 0,$$

und das vierte von t freie Integral lautet:

$$p = \text{Const.}$$

Der Verlauf der weiteren Rechnung führt auf elliptische Functionen.

Dasselbe gilt von einem etwas allgemeineren durch *Halphen**) in äusserst eleganter Weise erledigten Fall, nämlich dann, wenn der Körper in sich selbst übergeht, nachdem man ihn um einen rechten Winkel um eine Axe

*) Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. Tome II, Paris 1888. Pag. 146—191.

gedreht hat; hier kann die lebendige Kraft auf die Form

$$T = \tfrac{1}{2}\{Au^2+B(v^2+w^2)+Pp^2+Q(q^2+r^2)+2Lpu+2M(qv+wr)\}$$

gebracht werden*), und das vierte Integral lautet:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \text{Const.}$$

Selbstverständlich kann die Lösung des Problems auch dann erreicht werden, wenn die lebendige Kraft des ganzen Systems die Form hat, welche sie bei der Bewegung eines festen Körpers im leeren Raum besitzt. Es ist dies der Fall, wenn die Gestalt des Körpers bei beliebiger Massenvertheilung bezüglich zweier sich schneidenden Axen den Charakter des von ***Kirchhoff*** behandelten Körpers besitzt. Denn in diesem Falle hat die lebendige Kraft der flüssigen Masse, falls der geometrische Mittelpunkt zum Coordinatenanfangspunkt gewählt wird, die Form:

$$\tfrac{1}{2}(M'(u^2+v^2+w^2)+P(p^2+q^2+r^2)),$$

d. h. diejenige einer mit dem gegebenen Körper fest verbundenen kugelförmigen Masse, deren Schwerpunkt in den Mittelpunkt des Körpers fällt. Die lebendige Kraft des ganzen Systems ist also die eines festen Körpers, welcher sich aus der eben gekennzeichneten mitgeführten Masse und der gegebenen Masse zusammensetzt. Wählen wir den Schwerpunkt dieses Systems zum Anfangspunkt und die Hauptträgheitsaxen zu Axen des in dem Körper festen Coordinatensystems, so nimmt die lebendige Kraft die Form an:

$$\tfrac{1}{2}\{M(u^2+v^2+w^2)+Pp^2+Qq^2+Rr^2\}.$$

Das vierte algebraische Integral wird in diesem Falle

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 = \text{Const.}$$

und ist also, wie die drei allgemeinen Integrale, eine constant gesetzte quadratische Function**).

Clebsch hat allgemein die Frage untersucht, welche Form die lebendige Kraft des ganzen Systems annehmen müsse, damit ein viertes Integral von der eben erwähnten Beschaffenheit existire. Er findet ausser dem von ***Halphen*** durchgeführten Fall als Antwort auf seine Frage den Ausdruck

$$(7.)\qquad \tfrac{1}{2}\{Au^2+Bv^2+Cw^2+Pp^2+Qq^2+Rr^2\}$$

---

*) ***Lamb-Reiff.*** Einleitung in die Hydrodynamik, S. 198—199. Freiburg 1884.

**) Vergl. des Verfassers Abhandlung im Arch. f. Math. u. Phys. (2) IV, S. 157—167.

mit der beschränkenden Nebenbedingung:

$$(8.)\qquad P\left\{\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right\}+Q\left\{\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right\}+R\left\{\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right\} = 0,$$

welcher, abgesehen von dem *Halphen*schen Falle, alle bisher aufgeführten speciellen Formen von T umschliesst.

Wir finden das vierte Integral am einfachsten und machen das Problem für die weitere Behandlung am geeignetsten, indem wir an Stelle der sechs Geschwindigkeitscomponenten die Componenten und Drehungsmomente des Impulses bezüglich der in dem Körper festen Axen einführen:

$$(4.)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\partial T}{\partial u}, & x_2 = \dfrac{\partial T}{\partial v}, & x_3 = \dfrac{\partial T}{\partial w}, \\ y_1 = \dfrac{\partial T}{\partial p}, & y_2 = \dfrac{\partial T}{\partial q}, & y_3 = \dfrac{\partial T}{\partial r}. \end{cases}$$

Dann wird T eine ganze homogene quadratische Function der Grössen x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, und die Componenten der Geschwindigkeit werden

$$(9.)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial T}{\partial x_1}, & v = \dfrac{\partial T}{\partial x_2}, & w = \dfrac{\partial T}{\partial x_3}, \\ p = \dfrac{\partial T}{\partial y_1}, & q = \dfrac{\partial T}{\partial y_2}, & r = \dfrac{\partial T}{\partial y_3}. \end{cases}$$

Setzt man für den eben bezeichneten Fall

$$a_1 = \frac{1}{A},\quad a_2 = \frac{1}{B},\quad a_3 = \frac{1}{C},\quad b_1 = \frac{1}{P},\quad b_2 = \frac{1}{Q},\quad b_3 = \frac{1}{R},$$

so wird

$$(10.)\qquad T = \tfrac{1}{2}\{a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+b_1y_1^2+b_2y_2^2+b_3y_3^2\},$$

und die Gleichung (8.) geht über in:

$$(11.)\qquad a_1\left(\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_3}\right)+a_2\left(\frac{1}{b_3}-\frac{1}{b_1}\right)+a_3\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2}\right) = 0.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir nach Ausschluss der oben erwähnten, als völlig erledigt anzusehenden Specialfälle voraussetzen, dass die Grössen a_1, a_2, a_3 sämmtlich von einander verschieden sind. Denn wären zwei derselben, z. B. a_2 und a_3, einander gleich, so müssten wegen der eben angegebenen Beziehung entweder auch die entsprechenden Grössen b einander gleich sein, oder das dritte a müsste denselben Werth haben wie die beiden anderen; in dem einen Falle hat also die lebendige Kraft dieselbe Form wie bei der Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit, im anderen wie bei der Bewegung eines festen Körpers im leeren Raume.

Die Differentialgleichungen werden

$$(12.)\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = b_2y_2x_3 - b_3y_3x_2, & \frac{dy_1}{dt} = y_2y_3(b_2-b_3)+x_2x_3(a_2-a_3), \\ \frac{dx_2}{dt} = b_3y_3x_1 - b_1y_1x_3, & \frac{dy_2}{dt} = y_3y_1(b_3-b_1)+x_3x_1(a_3-a_1), \\ \frac{dx_3}{dt} = b_1y_1x_2 - b_2y_2x_1, & \frac{dy_3}{dt} = y_1y_2(b_1-b_2)+x_1x_2(a_1-a_2). \end{cases}$$

Multiplicirt man die links stehenden Gleichungen der Reihe nach mit

$$-2a_2a_3x_1, \quad -2a_3a_1x_2, \quad -2a_1a_2x_3,$$

die rechts stehenden mit

$$2b_1a_1y_1, \quad 2b_2a_2y_2, \quad 2b_3a_3y_3,$$

und addirt sie alsdann, so erhält man rechts

$$2y_1y_2y_3(b_1a_1(b_2-b_3)+b_2a_2(b_3-b_1)+b_3a_3(b_1-b_2)),$$

und dies reducirt sich wegen der zwischen den Constanten bestehenden Relation (11.) auf Null.

Wir können also den drei allgemeinen Integralen

$$(6^a.)\begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2 = J^2, \\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 = JJ_1, \\ a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+b_1y_1^2+b_2y_2^2+b_3y_3^2 = L \end{cases}$$

in unserem Falle das vierte Integral

$$(6^b.) \quad -(a_2a_3x_1^2+a_3a_1x_2^2+a_1a_2x_3^2)+b_1a_1y_1^2+b_2a_2y_2^2+b_3a_3y_3^2 = L_1$$

hinzufügen, welches nur in dem Falle $a_1 = a_2 = a_3$ als Folge der drei anderen angesehen werden kann.

Schon *Clebsch* hat das vollständige Differential zweier Grössen aufgestellt, durch dessen Integration man das fünfte von t freie Integral erhält. Dagegen ist das Problem, die in Frage kommenden Grössen x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 und dann weiter die Richtungscosinus und die Coordinaten ξ, η, ζ des Punktes O als explicite Functionen der Zeit darzustellen, nicht von ihm in Angriff genommen. Für den Fall $J_1 = 0$, d. h. wenn das impulsive Kraftsystem sich auf eine impulsive Einzelkraft reducirt, ist diese Aufgabe durch Herrn *H. Weber* *) gelöst worden. Derselbe stellte sämmtliche Richtungscosinus und die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit sowohl

*) Mathematische Annalen XIV, S. 143—206.

bezüglich der beweglichen als der festen Axen als Quotienten von Thetafunctionen von zwei Argumenten dar, welche selbst ganze lineare Functionen der Zeit sind, und zwar haben alle diese Grössen dieselbe Thetafunction im Nenner, während im Zähler je eine der fünfzehn anderen Thetafunctionen steht. Die beiden Coordinaten η, ζ unterscheiden sich von den Componenten der Rotationsgeschwindigkeit nach den beiden entsprechenden Axen nur durch einen constanten Factor, während die Coordinate ξ linear aus t und den beiden partiellen logarithmischen Ableitungen derjenigen ϑ-Function zusammengesetzt ist, welche alle die genannten Ausdrücke im Nenner haben.

Im Folgenden soll das in Frage stehende Umkehrproblem ohne die von Herrn *Weber* gemachte beschränkende Voraussetzung gelöst werden. Auch in dem allgemeineren Falle ergeben sich die Richtungscosinus, die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit und des Impulses, sowie die Coordinaten η, ζ als Brüche mit gemeinschaftlichem Nenner, der sich aber hier aus zwei ϑ-Functionen linear zusammensetzt. Auch die Zähler setzen sich aus ϑ-Functionen zusammen. Aber nur bei den Componenten der Rotationsgeschwindigkeit nach den im Körper festen Axen, bei der nach der Axe des Impulses genommenen Componente der Rotationsgeschwindigkeit, bei den nach den beweglichen Axen genommenen Componenten und Drehungsmomenten des Impulses, sowie endlich bei den Richtungscosinus zwischen der Axe des Impulses und den mit dem Körper fest verbundenen Axen haben die Thetafunctionen des Zählers dieselben Argumente wie die des Nenners. Die im Zähler der übrigen Grössen auftretenden Thetafunctionen sind mit Argumenten gebildet, die durch Addition und Subtraction aus den erst erwähnten Argumenten und einem gewissen Constantenpaar entstehen. In dem von Herrn *Weber* behandelten Special-Falle geht das fragliche Constantenpaar in ein Paar simultaner Halbperioden über.

§ 4.

Zurückführung des Problems auf den Specialfall $b_1 = b_2 = b_3 = 1$.

Sechs Grössen, welche den vier Gleichungen (6*a*.) und (6*b*.) genügen, werden sich als Functionen zweier neuen Grössen u_1 und u_2 darstellen lassen, die wegen der Differentialgleichungen für die fraglichen Grössen Functionen der Zeit mit zwei neuen willkürlichen Constanten sein werden. Die vollständigen Differentiale der als Functionen von u_1 und u_2 angesehenen

Grössen x_α, y_α genügen folgenden Gleichungen:

$$\sum_{\alpha=1,2,3} x_\alpha dx_\alpha = 0,$$

$$\sum_{\alpha=1,2,3} y_\alpha dx_\alpha + \sum_{\alpha=1,2,3} x_\alpha dy_\alpha = 0,$$

$$\sum_{\alpha=1,2,3} a_\alpha x_\alpha dx_\alpha + \sum_{\alpha=1,2,3} b_\alpha y_\alpha dy_\alpha = 0,$$

$$-a_1 a_2 a_3 \sum_{\alpha=1,2,3} \frac{x_\alpha}{a_\alpha} dx_\alpha + \sum_{\alpha=1,2,3} b_\alpha a_\alpha y_\alpha dy_\alpha = 0.$$

Ein System von Grössen, welche diese Gleichungen erfüllen, ist bekannt; es wird gebildet von den Grössen $\frac{dx_\alpha}{dt}$, $\frac{dy_\alpha}{dt}$. Ein zweites derartiges System erhalten wir, wenn wir in dem erstgenannten die Grössen a_α, b_α ersetzen durch $a'_\alpha = -\frac{a_1 a_2 a_3}{a_\alpha}$; $b'_\alpha = b_\alpha a_\alpha$. Man erkennt leicht, dass zwischen den Grössen a'_α und b'_α dieselbe Beziehung besteht, wie zwischen den Grössen a_α und b_α; drücken wir nun in der dritten und vierten der eben angeführten Gleichungen a_α und b_α durch a'_α und b'_α aus, so erhalten wir die Gleichungen:

$$-a'_1 a'_2 a'_3 \Sigma \frac{x_\alpha}{a'_\alpha} dx_\alpha + \Sigma b'_\alpha a'_\alpha y_\alpha dy_\alpha = 0,$$

$$+\Sigma a'_\alpha x_\alpha dx_\alpha + \Sigma b'_\alpha y_\alpha dy_\alpha = 0,$$

welche aus der vierten und dritten Gleichung durch directe Vertauschung von a_α und b_α mit a'_α und b'_α hervorgehen.

Nur in einem Ausnahmefalle sind beide Grössensysteme einander proportional; nämlich dann, wenn jedes y zu dem betreffenden x in einem gewissen constanten Verhältniss steht. Dieser nur unter gewissen Voraussetzungen über den Anfangszustand mögliche Fall führt, wie leicht zu sehen, auf elliptische Functionen; wir wollen von ihm bei der ferneren Betrachtung absehen und uns ausschliesslich dem allgemeinen Falle zuwenden.

Dann darf also gesetzt werden

$$dx_1 = (b_2 y_2 x_3 - b_3 y_3 x_2)\mathfrak{U} + (b_2 a_2 y_2 x_3 - b_3 a_3 y_3 x_2)\mathfrak{V},$$

$$dy_1 = \{(b_2 - b_3) y_2 y_3 + (a_2 - a_3) x_2 x_3\} \mathfrak{U} + \{(b_2 a_2 - b_3 a_3) y_2 y_3 + a_1 (a_2 - a_3) x_2 x_3\} \mathfrak{V}.$$

Es ist klar, dass die unabhängigen Variabeln so gewählt werden können, dass $\mathfrak{U} = U du_1$, $\mathfrak{V} = V du_2$ wird. Bildet man nun auf die beiden möglichen Arten die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial u_1 \partial u_2}$ und $\frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial u_1 \partial u_2}$, so erhält man durch Vergleichung der gewonnenen Ausdrücke nach kurzer Rechnung die beiden

Gleichungen:

$$(b_2 y_2 x_3 - b_3 y_3 x_2)\frac{\partial U}{\partial u_2} - (b_2 a_2 y_2 x_3 - b_3 a_3 y_3 x_2)\frac{\partial V}{\partial u_1} = 0,$$

$$\{(b_2 - b_3) y_2 y_3 + (a_2 - a_3) x_2 x_3\}\frac{\partial U}{\partial u_2} - \{(b_2 a_2 - b_3 a_3) y_2 y_3 + a_1 (a_2 - a_3) x_2 x_3\}\frac{\partial V}{\partial u_1} = 0$$

und vier andere, welche durch cyklische Vertauschung der Indices aus diesen entstehen. Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass U von u_2 und V von u_1 unabhängig ist, und dass also bei passender Wahl der unabhängigen Veränderlichen beide Grössen gleich 1 gesetzt werden können. Dann nehmen die Gleichungen die Form an

$$(13.)\quad \begin{cases} dx_1 = (b_2 y_2 x_3 - b_3 y_3 x_2) du_1 + (b_2 a_2 y_2 x_3 - b_3 a_3 y_3 x_2) du_2, \\ dy_1 = ((b_2 - b_3) y_2 y_3 + (a_2 - a_3) x_2 x_3) du_1 + ((b_2 a_2 - b_3 a_3) y_2 y_3 + a_1 (a_2 - a_3) x_2 x_3) du_2, \end{cases}$$

deren Integration, wie zuerst Herr *Schottky* *) angegeben hat, identisch mit derjenigen der Gleichungen (12.) ist.

Wegen der zwischen den Grössen b_α und a_α vorausgesetzten Relation darf gesetzt werden

$$(14.)\quad \frac{1}{b_\alpha} = m a_\alpha + n \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Führen wir nun an Stelle der Grössen u_1, u_2 zwei andere unabhängige Veränderliche ein, welche durch die Gleichungen

$$du_1 = n\,d\tau_1 + n'\,d\tau_2, \quad du_2 = m\,d\tau_1 + m'\,d\tau_2$$

definirt sind, in denen m' und n' Constanten sind, welche der Bedingung

$$(15.)\quad n.m' - m.n' = \prod_{\alpha=1,2,3} (m a_\alpha + n) = \frac{1}{b_1 b_2 b_3}$$

genügen, so nehmen die Gleichungen folgende Form an:

$$(16.)\quad \begin{cases} dx_1 = (y_2 x_3 - y_3 x_2) d\tau_1 + (c_2 y_2 x_3 - c_3 y_3 x_2) d\tau_2, \\ dy_1 = (c_2 - c_3) x_2 x_3 d\tau_1 + ((c_2 - c_3) y_2 y_3 + c_1 (c_2 - c_3) x_2 x_3) d\tau_2, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$(17.)\quad c_\alpha = \frac{m' a_\alpha + n'}{m a_\alpha + n} = \frac{m'}{m} - \frac{1}{m} \cdot \frac{b_\alpha}{b_1 b_2 b_3}$$

gesetzt ist. Es ist dies aber offenbar die specielle Form der Gleichungen (13.), auf welche man geführt wird, wenn die drei Grössen b den Werth 1 haben. Es würde sich übrigens das Problem noch mehr specialisiren lassen,

---

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1891.

indem alle Fälle, bei denen der Quotient

$$\frac{c_1-c_2}{c_1-c_3}$$

denselben Werth hat, sich auf einander reduciren lassen; jedoch hat das für den weiteren Verlauf der Rechnung keine Bedeutung.

§ 5.

Die Darstellung der Grössen x_a, y_a durch hyperelliptische Functionen.

Nach den Ausführungen des vorhergehenden Abschnitts können wir die vier Integralgleichungen (6^a.) und (6^b.) ersetzen durch vier andere Gleichungen, welche sich ergeben, wenn die Grössen b_a sämmtlich gleich 1 gesetzt werden, und die Grössen a_a mit den Grössen c_a vertauscht werden. So erhalten wir die Gleichungen:

$$(6c.)\quad \begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2 = k_0, \\ c_1x_1^2+c_2x_2^2+c_3x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2 = 2k_1+k_0(c_1+c_2+c_3), \\ -(c_2c_3x_1^2+c_3c_1x_2^2+c_1c_2x_3^2)+c_1y_1^2+c_2y_2^2+c_3y_3^2 = -k_2, \\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 = k_3. \end{cases}$$

Dieselben lassen sich, indem wir sie mit

$$s^2-s(c_1+c_2+c_3),\quad s,\quad -1,\quad 2\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}$$

multipliciren und addiren, in eine Identität bezüglich des elliptischen Werthepaares s, $\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}$ zusammenziehen, nämlich in:

$$(18.)\quad \begin{cases} \sum_{a=1,2,3}\left(x_a\frac{\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}}{\sqrt{s-c_a}}+y_a\sqrt{s-c_a}\right)^2 \\ \qquad = k_0s^2+2k_1s+k_2+2k_3\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}. \end{cases}$$

Die rechte Seite der vorstehenden Gleichung verschwindet im allgemeinen für vier Werthepaare s, $\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}$, von denen allerdings unter Umständen mehrere zusammenfallen können. Diese besonderen Fälle stehen zu dem allgemeinen Falle in demselben Verhältniss, wie die von Herrn *Fennel**) behandelten besonderen Fälle zu dem von Herrn *Weber* durchgeführten Specialfall des Problems; auch hier führt das Problem in den Ausnahmefällen auf elliptische Functionen. Wir wollen sie im Folgenden von der Betrachtung ausschliessen; man wird übrigens leicht übersehen, wie

*) Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer tropfbaren Flüssigkeit. Inaug.-Diss. Marburg 1888, Progr. Cassel 1888.

die im Folgenden durchgeführten Betrachtungen zu modificiren sind, um sie den Ausnahmefällen anzupassen.

Setzen wir nun in die Gleichung nach einander die vier Nullstellen ein, so erhalten wir vier Gleichungen:

$$(19.)\qquad \sum_{\alpha=1,2,3}\left(x_\alpha \frac{\sqrt{(s_\beta-c_1)(s_\beta-c_2)(s_\beta-c_3)}}{\sqrt{s_\beta-c_\alpha}}+y_\alpha\sqrt{s_\beta-c_\alpha}\right)^2 = 0 \qquad (\beta=1,2,3,4),$$

die offenbar nicht unabhängig von einander sein können, weil die Gleichung $\Sigma x_\alpha^2 = k_0$ sich aus ihnen nicht ableiten lässt. Aber auch analytisch lässt sich das leicht einsehen. Bezeichnet man mit $\psi(s)$ die Function

$$(20.)\qquad \psi(s) = (s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4),$$

so wird, unabhängig von dem Werthe der Grössen u und v:

$$(21.)\qquad \sum_{\beta=1,2,3,4}\frac{1}{\psi'(s_\beta)}\left\{u\frac{\sqrt{(s_\beta-c_1)(s_\beta-c_2)(s_\beta-c_3)}}{\sqrt{s_\beta-c_\alpha}}+v\sqrt{s_\beta-c_\alpha}\right\}^2 = 0 \qquad (\alpha=1,2,3).$$

Ordnet man nach Potenzen von u und v, so erkennt man unmittelbar, dass die Coefficienten von u^2 und v^2 verschwinden. Der Coefficient von uv wird

$$2\sum_{\beta=1,2,3,4}\frac{\sqrt{(s_\beta-c_1)(s_\beta-c_2)(s_\beta-c_3)}}{\psi'(s_\beta)};$$

da aber die hier auftretenden Werthepaare Nullstellen der rechten Seite der Gleichung (18.) sein sollten, so ist

$$2\sqrt{(s_\beta-c_1)(s_\beta-c_2)(s_\beta-c_3)} = -\frac{1}{k_3}(k_0 s_\beta^2+2k_1 s_\beta+k_2),$$

und der fragliche Coefficient wird

$$-\frac{1}{k_3}\sum_{\beta=1,2,3,4}\frac{k_0 s_\beta^2+2k_1 s_\beta+k_2}{\psi'(s_\beta)};$$

das ist aber nach bekannten Sätzen der Algebra gleich Null.

Aus der somit bewiesenen Identität (21.) folgt dann unmittelbar, dass jeder der beiden durch

$$u\left(\frac{\sqrt{(s_3-c_1)(s_3-c_2)(s_3-c_3)}}{\sqrt{s_3-c_\alpha}\sqrt{\psi'(s_3)}}\pm i\frac{\sqrt{(s_4-c_1)(s_4-c_2)(s_4-c_3)}}{\sqrt{(s_4-c_\alpha)}\sqrt{\psi'(s_4)}}\right)+v\left(\frac{\sqrt{s_3-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_3)}}\pm i\frac{\sqrt{s_4-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}\right)$$

dargestellten Ausdrücke sich von je einem der beiden Werthe

$$u\left(\frac{\sqrt{(s_1-c_1)(s_1-c_2)(s_1-c_3)}}{\sqrt{s_1-c_\alpha}\sqrt{\psi'(s_1)}}\pm i\frac{\sqrt{(s_2-c_1)(s_2-c_2)(s_2-c_3)}}{\sqrt{s_2-c_\alpha}\sqrt{\psi'(s_2)}}\right)+v\left(\frac{\sqrt{s_1-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_1)}}\pm i\frac{\sqrt{s_2-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}\right)$$

nur durch einen constanten, d. h. von u und v unabhängigen, Factor unterscheiden kann. Es fragt sich nur, wie die Zeichen der Wurzeln $\sqrt{s_\beta-c_\alpha}$ zu wählen sind, damit die Ausdrücke mit gleichen Zeichen aus beiden

Reihen einander entsprechen. Dazu ist offenbar erforderlich, dass

$$\frac{\dfrac{\sqrt{(s_3-c_1)(s_3-c_2)(s_3-c_3)}}{\sqrt{s_3-c_\alpha}\sqrt{\psi'(s_3)}}+i\dfrac{\sqrt{(s_4-c_1)(s_4-c_2)(s_4-c_3)}}{\sqrt{s_4-c_\alpha}\sqrt{\psi'(s_4)}}}{\dfrac{\sqrt{(s_1-c_1)(s_1-c_2)(s_1-c_3)}}{\sqrt{s_1-c_\alpha}\sqrt{\psi'(s_1)}}+i\dfrac{\sqrt{(s_2-c_1)(s_2-c_2)(s_2-c_3)}}{\sqrt{s_2-c_\alpha}\sqrt{\psi'(s_2)}}} = \frac{\dfrac{\sqrt{s_3-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_3)}}+i\dfrac{\sqrt{s_4-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}}{\dfrac{\sqrt{s_1-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_1)}}+i\dfrac{\sqrt{s_2-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}}$$

werde. Benutzt man, dass die rechte Seite der vorstehenden Gleichung durch

$$-\frac{\dfrac{\sqrt{s_1-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_1)}}-i\dfrac{\sqrt{s_2-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}}{\dfrac{\sqrt{s_3-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_3)}}-i\dfrac{\sqrt{s_4-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}}$$

ersetzt werden darf, so erhält man nach Fortschaffung der Nenner die Gleichung

$$\left\{\frac{\sqrt{(s_3-c_1)(s_3-c_2)(s_3-c_3)}}{\sqrt{s_3-c_\alpha}\sqrt{\psi'(s_3)}}+i\frac{\sqrt{(s_4-c_1)(s_4-c_2)(s_4-c_3)}}{\sqrt{s_4-c_\alpha}\sqrt{\psi'(s_4)}}\right\}\left\{\frac{\sqrt{s_3-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_3)}}-i\frac{\sqrt{s_4-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}\right\}$$
$$= -\left\{\frac{\sqrt{(s_1-c_1)(s_1-c_2)(s_1-c_3)}}{\sqrt{s_1-c_\alpha}\sqrt{\psi'(s_1)}}+i\frac{\sqrt{(s_2-c_1)(s_2-c_2)(s_2-c_3)}}{\sqrt{s_2-c_\alpha}\sqrt{\psi'(s_2)}}\right\}\left\{\frac{\sqrt{s_1-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_1)}}-i\frac{\sqrt{s_2-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}\right\},$$

welche sich wegen der schon abgeleiteten Beziehung

$$\sum_{\beta=1,2,3,4}\frac{\sqrt{(s_\beta-c_1)(s_\beta-c_2)(s_\beta-c_3)}}{\psi(s_\beta)} = 0$$

auf

$$i\frac{\sqrt{(s_4-c_1)(s_4-c_2)(s_4-c_3)}(s_3-c_\alpha)-\sqrt{(s_3-c_1)(s_3-c_2)(s_3-c_3)}(s_4-c_\alpha)}{\sqrt{\psi'(s_3)}\sqrt{\psi'(s_4)}\sqrt{s_3-c_\alpha}\sqrt{s_4-c_\alpha}}$$
$$= -i\frac{\sqrt{(s_2-c_1)(s_2-c_2)(s_2-c_3)}(s_1-c_\alpha)-\sqrt{(s_1-c_1)(s_1-c_2)(s_1-c_3)}(s_2-c_\alpha)}{\sqrt{\psi'(s_1)}\sqrt{\psi'(s_2)}\sqrt{s_1-c_\alpha}\sqrt{s_2-c_\alpha}}$$

reducirt. Setzen wir zur Abkürzung $k_0s^2+2k_1s+k_2 = g(s)$, so ist für jede Nullstelle

$$\sqrt{(s_\beta-c_1)(s_\beta-c_2)(s_\beta-c_3)} = -\frac{g(s_\beta)}{2k_3},$$

sodass die vorstehende Gleichung übergeht in:

$$\frac{\{k_0(s_3-c_\alpha)(s_4-c_\alpha)-g(c_\alpha)\}(s_3-s_4)}{\sqrt{\psi'(s_3)}\sqrt{\psi'(s_4)}\sqrt{(s_3-c_\alpha)}\sqrt{(s_4-c_\alpha)}} = -\frac{\{k_0(s_1-c_\alpha)(s_2-c_\alpha)-g(c_\alpha)\}(s_1-s_2)}{\sqrt{\psi'(s_1)}\sqrt{\psi'(s_2)}\sqrt{s_1-c_\alpha}\sqrt{s_2-c_\alpha}}.$$

Man übersieht leicht, dass

$$(21.)\qquad \frac{s_3-s_4}{\sqrt{\psi'(s_3)}\sqrt{\psi'(s_4)}} = (-1)^n\frac{s_1-s_2}{\sqrt{\psi'(s_1)}\sqrt{\psi'(s_2)}}$$

gesetzt werden kann, wo n je nach Wahl der Wurzelzeichen eine ungerade oder gerade Zahl bezeichnet. Ferner ist

$$(g(s))^2-4k_3^2(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3) = k_0^2(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4),$$

sodass

$$(22.)\qquad g(c_a) = (-1)^{n_a} k_0\sqrt{s_1-c_a}\sqrt{s_2-c_a}\sqrt{s_3-c_a}\sqrt{s_4-c_a}$$

wird. Unter Benutzung dieser Resultate erhält man als Bedingung für die Zusammengehörigkeit gleicher Zeichen die Gleichung

$$(23.)\qquad (-1)^{n+n_a} = 1$$

oder

$$n_a = n.$$

Wir wollen den Wurzeln $\sqrt{\psi'(s_\beta)}$ $(\beta = 1, 2, 3, 4)$ für alle drei Indices a denselben Werth beilegen und dann die Wurzeln $\sqrt{s_\beta - c_a}$ entsprechend der eben angegebenen Bedingung auswählen. Ferner soll gesetzt werden:

$$(24.)\quad \begin{cases} \xi_a = x_a\left(\dfrac{\sqrt{(s_1-c_1)(s_1-c_2)(s_1-c_3)}}{\sqrt{s_1-c_a}\sqrt{\psi'(s_1)}} + i\dfrac{\sqrt{(s_2-c_1)(s_2-c_2)(s_2-c_3)}}{\sqrt{s_2-c_a}\sqrt{\psi'(s_2)}}\right) \\ \qquad\qquad + y_a\left(\dfrac{\sqrt{s_1-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} + i\dfrac{\sqrt{s_2-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}\right), \\ \eta_a = x_a\left(\dfrac{\sqrt{(s_1-c_1)(s_1-c_2)(s_1-c_3)}}{\sqrt{s_1-c_a}\sqrt{\psi'(s_1)}} - i\dfrac{\sqrt{(s_2-c_1)(s_2-c_2)(s_2-c_3)}}{\sqrt{s_2-c_a}\sqrt{\psi'(s_2)}}\right) \\ \qquad\qquad + y_a\left(\dfrac{\sqrt{s_1-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} - i\dfrac{\sqrt{s_2-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}\right), \end{cases}$$

$$(25.)\qquad d_a = \frac{\dfrac{\sqrt{s_3-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_3)}} + i\dfrac{\sqrt{s_4-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}}{\dfrac{\sqrt{s_1-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} + i\dfrac{\sqrt{s_2-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}}, \quad -d_a^{-1} = \frac{\dfrac{\sqrt{s_3-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_3)}} - i\dfrac{\sqrt{s_4-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}}{\dfrac{\sqrt{s_1-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} - i\dfrac{\sqrt{s_2-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}}.$$

Die Gleichungen (19.) liefern folgende Beziehungen zwischen den Grössen ξ_a, η_a:

$$\sum_{a=1,2,3}(\xi_a+\eta_a)^2 = 0, \quad \sum_{a=1,2,3}(\xi_a-\eta_a)^2 = 0; \quad \sum_{a=1,2,3}\left(d_a\xi_a - \frac{\eta_a}{d_a}\right)^2 = 0, \quad \sum_{a=1,2,3}\left(d_a\xi_a + \frac{\eta_a}{d_a}\right)^2 = 0,$$

welche sich durch die drei Gleichungen

$$(26.)\quad \begin{cases} a) \quad \sum_{a=1,2,3}\xi_a^2 + \sum_{a=1,2,3}\eta_a^2 = 0, \\ b) \quad \sum_{a=1,2,3}\xi_a\eta_a = 0, \\ c) \quad \sum_{a=1,2,3}d_a^2\xi_a^2 + \sum_{a=1,2,3}\frac{\eta_a^2}{d_a^2} = 0 \end{cases}$$

ersetzen lassen. Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die Grössen x_a, y_a nicht nothwendig den Gleichungen (6c.) zu genügen brauchen, damit die durch (24.) definirten Grössen ξ_a, η_a den Gleichungen (26.) genügen; dazu reicht vielmehr schon die Erfüllung der durch die Gleichungen (19.) ausgesprochenen Bedingung hin. Diese ist z. B. auch dann erfüllt, wenn für jedes s die Gleichung gilt:

$$\sum_{a=1,2,3}\left(x_a\frac{\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}}{\sqrt{s-c_a}}+y_a\sqrt{s-c_a}\right)^2 = 0,$$

und das ist der Fall, wenn

$$x_a = \lambda\frac{\sqrt{s'-c_a}}{\sqrt{\varphi'(c_a)}} \quad \text{und} \quad y_a = -\lambda\frac{\sqrt{(s'-c_1)(s'-c_2)(s'-c_3)}}{\sqrt{s'-c_a}\sqrt{\varphi'(c_a)}} \qquad (a=1,2,3)$$

wird, wo λ und s' ganz beliebige Grössen bedeuten, und $\varphi(x)$ die Function $(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)$ bezeichnet.

Wir bezeichnen jetzt mit z_1, z_2 die beiden Wurzeln der nach z aufzulösenden Gleichung:

$$(27.) \qquad \frac{\eta_1^2}{d_1^2-z}+\frac{\eta_2^2}{d_2^2-z}+\frac{\eta_3^2}{d_3^2-z} = 0,$$

mit L^2 den Ausdruck

$$(28.) \qquad L^2 = \eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2$$

und endlich mit $\chi(x)$ die Function $(x-d_1^2)(x-d_2^2)(x-d_3^2)$; dann wird

$$(29.) \qquad \eta_a = L\frac{\sqrt{(z_1-d_a^2)(z_2-d_a^2)}}{\sqrt{\chi'(d_a^2)}} \qquad (a=1,2,3).$$

Wegen der zweiten der Gleichungen (26.) dürfen wir offenbar setzen

$$\xi_a = \eta_a\left\{\frac{U_1}{z_1-d_a^2}+\frac{U_2}{z_2-d_a^2}\right\} \qquad (a=1,2,3).$$

Setzt man diese Werthe in die beiden Gleichungen ein:

$$\sum_{a=1,2,3}(d_a^2-z_\beta)\xi_a^2+\sum_{a=1,2,3}\left(\frac{1}{d_a^2}-z_\beta\right)\eta_a^2 = 0 \qquad (\beta=1,2),$$

welche unmittelbar aus den Gleichungen (26a.) und (26c.) folgen, so erhält man die Gleichungen:

$$U_1^2(z_1-z_2)\sum_{a=1,2,3}\frac{\eta_a^2}{(d_a^2-z_1)^2}+\sum_{a=1,2,3}\left(\frac{1}{d_a^2}-z_2\right)\eta_a^2 = 0,$$

$$U_2^2(z_2-z_1)\sum_{a=1,2,3}\frac{\eta_a^2}{(d_a^2-z_2)^2}+\sum_{a=1,2,3}\left(\frac{1}{d_a^2}-z_1\right)\eta_a^2 = 0,$$

oder anders geschrieben

$$\frac{L^2 U_1^2(z_1-z_2)^2}{(d_1^2-z_1)(d_2^2-z_1)(d_3^2-z_1)}+L^2\left(\frac{z_1 z_1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2}-z_2\right) = 0,$$

$$\frac{L^2 U_2^2(z_1-z_2)^2}{(d_1^2-z_2)(d_2^2-z_2)(d_3^2-z_2)}+L^2\left(\frac{z_1 z_2}{d_1^2 d_2^2 d_3^2}-z_1\right) = 0.$$

Setzt man nun

$$(30.)\qquad Z_\beta = \sqrt{z_\beta(z_\beta-d_1^2)(z_\beta-d_2^2)(z_\beta-d_3^2)\left(\frac{z_\beta}{d_1^2 d_2^2 d_3^2}-1\right)} \qquad (\beta=1,2),$$

so ergiebt sich, passende Wahl der Wurzelzeichen vorausgesetzt,

$$U_1 = \sqrt{z_1 z_2}\frac{Z_1}{z_1(z_1-z_2)},\qquad U_2 = \sqrt{z_1 z_2}\frac{Z_2}{z_2(z_2-z_1)};$$

es wird also

$$(31.)\qquad \xi_\alpha = \eta_\alpha\frac{\sqrt{z_1 z_2}}{(z_1-z_2)}\left(\frac{Z_1}{z_1(z_1-d_\alpha^2)}-\frac{Z_2}{z_2(z_2-d_\alpha^2)}\right) \qquad (\alpha=1,2,3).$$

Um nun L durch z_1 und z_2 auszudrücken, verfahren wir folgendermassen. Es sei x'_α, y'_α ($\alpha = 1, 2, 3$) ein zweites System von Grössen, welches den Gleichungen (19.) genügt; ξ'_α, η'_α seien die Grössen:

$$\xi'_\alpha = x'_\alpha\left(\frac{\sqrt{(s_1-c_1)(s_1-c_2)(s_1-c_3)}}{\sqrt{s_1-c_\alpha}\sqrt{\psi'(s_1)}}+i\frac{\sqrt{(s_2-c_1)(s_2-c_2)(s_2-c_3)}}{\sqrt{s_2-c_\alpha}\sqrt{\psi'(s_2)}}\right)$$
$$+y'_\alpha\left(\frac{\sqrt{s_1-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_1)}}+i\frac{\sqrt{s_2-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}\right),$$

$$\eta'_\alpha = x'_\alpha\left(\frac{\sqrt{(s_1-c_1)(s_1-c_2)(s_1-c_3)}}{\sqrt{s_1-c_\alpha}\sqrt{\psi'(s_1)}}-i\frac{\sqrt{(s_2-c_1)(s_2-c_2)(s_2-c_3)}}{\sqrt{s_2-c_\alpha}\sqrt{\psi'(s_2)}}\right)$$
$$+y'_\alpha\left(\frac{\sqrt{s_1-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_1)}}-i\frac{\sqrt{s_2-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}\right).$$

Dann müssen sich natürlich ξ'_α, η'_α in derselben Weise durch drei Grössen L', z'_1, z'_2 darstellen lassen wie ξ_α, η_α durch L, z_1, z_2. Indem wir nun zur Abkürzung

$$(32.)\quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(z_1-d_\alpha^2)(z_2-d_\alpha^2)}}{\sqrt{\chi'(d_\alpha^2)}} = Q_\alpha; & Q_\alpha\dfrac{\sqrt{z_1 z_2}}{z_1-z_2}\left(\dfrac{Z_1}{z_1(z_1-d_\alpha^2)}-\dfrac{Z_2}{z_2(z_2-d_\alpha^2)}\right) = R_\alpha, \\ \dfrac{\sqrt{(z'_1-d_\alpha^2)(z'_2-d_\alpha^2)}}{\sqrt{\chi'(d_\alpha^2)}} = Q'_\alpha; & Q'_\alpha\dfrac{\sqrt{z'_1 z'_2}}{z'_1-z'_2}\left(\dfrac{Z'_1}{z'_1(z'_1-d_\alpha^2)}-\dfrac{Z'_2}{z'_2(z'_2-d_\alpha^2)}\right) = R'_\alpha \end{cases}$$

setzen, erhalten wir:

$$(x_\alpha y'_\alpha-y_\alpha x'_\alpha)2i\left(\frac{\sqrt{(s_2-c_1)(s_2-c_2)(s_2-c_3)}}{\sqrt{s_2-c_\alpha}\sqrt{\psi'(s_2)}}\frac{\sqrt{s_1-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_1)}}\right.$$
$$\left.-\frac{\sqrt{(s_1-c_1)(s_1-c_2)(s_1-c_3)}}{\sqrt{s_1-c_\alpha}\sqrt{\psi'(s_1)}}\frac{\sqrt{s_2-c_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}\right) = (\xi_\alpha\eta'_\alpha-\xi'_\alpha\eta_\alpha) = LL'(R_\alpha Q'_\alpha-Q_\alpha R'_\alpha).$$

Wie schon vorher auseinandergesetzt wurde, genügen die Grössen

$$2\frac{\sqrt{s'-c_a}}{\sqrt{\psi'(s')}\sqrt{\varphi'(c_a)}} \quad \text{und} \quad -2\frac{\sqrt{(s'-c_1)(s'-c_2)(s'-c_3)}}{\sqrt{\varphi'(c_a)}\sqrt{s'-c_a}\sqrt{\psi'(s')}}$$

den Gleichungen (19.) für x_a, y_a. Setzen wir speciell $s'=s_1$, so werden die zugehörigen Grössen ξ und η bestimmt durch die Gleichungen:

$$(33.)\quad \begin{cases} \xi_a^0 = -\eta_a^0 = +\dfrac{2i}{\sqrt{\varphi'(c_a)}}\left\{\dfrac{\sqrt{(s_2-c_1)(s_2-c_2)(s_2-c_3)}}{\sqrt{\psi'(s_2)}\sqrt{s_2-c_a}}\dfrac{\sqrt{s_1-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_1)}}\right. \\ \qquad\qquad \left. -\dfrac{\sqrt{(s_1-c_1)(s_1-c_2)(s_1-c_3)}}{\sqrt{s_1-c_a}\sqrt{\psi'(s_1)}}\dfrac{\sqrt{s_2-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}\right\}, \end{cases}$$

sodass die Grössen ξ_a^0 den beiden Gleichungen:

$$\xi_1^{0^2}+\xi_2^{0^2}+\xi_3^{0^2} = 0,$$

$$\left(d_1^2+\frac{1}{d_1^2}\right)\xi_1^{0^2}+\left(d_2^2+\frac{1}{d_2^2}\right)\xi_2^{0^2}+\left(d_3^2+\frac{1}{d_3^2}\right)\xi_3^{0^2} = 0$$

genügen, deren Lösung wir offenbar in der Form

$$(34.)\qquad \xi_a^0 = \mu\frac{\sqrt{d_a^2-d_1^2d_2^2d_3^2}}{\sqrt{\chi'(d_a^2)}}$$

ansetzen dürfen. So erhalten wir folgende wichtige Gleichung

$$(35.)\quad \sqrt{\varphi'(c_a)}(x_a y_a'-y_a x_a') = \frac{LL'}{\mu}\frac{\sqrt{\chi'(d_a^2)}}{\sqrt{d_a^2-d_1^2d_2^2d_3^2}}(R_a Q_a'-Q_a R_a') \quad (a=1,2,3),$$

welche für jedes Paar von Grössensytemen gilt, die den Gleichungen (19.) Genüge leisten.

Das ist der Fall, wenn x_a, y_a den vier Integralgleichungen genügen, und

$$x_a' = -\frac{\sqrt{s-c_a}}{\sqrt{\varphi'(c_a)}\sqrt{f(s)}},\quad y_a' = \frac{\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}}{\sqrt{s-c_a}\sqrt{\varphi'(c_a)}\sqrt{f(s)}},$$

wird, wo

$$f(s) = k_0s^2+2k_1s+k_2+2k_3\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}$$

gesetzt ist. Dann wird aber offenbar nach Gleichung (18.)

$$\sum_{a=1,2,3}(x_a y_a'-x_a' y_a)^2\varphi'(c_a) = 1$$

und also

$$(36.)\qquad \frac{LL'}{\mu} = \left\{ \sum_{a=1,2,3} \frac{\chi'(d_a^2)}{d_a^2 - d_1^2 d_2^2 d_3^2} (R_a Q'_a - Q_a R'_a)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Nachdem so die Ausdrücke

$$x_a \frac{\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}}{\sqrt{s-c_a}\sqrt{f(s)}} + y_a \frac{\sqrt{s-c_a}}{\sqrt{f(s)}}$$

durch hyperelliptische Functionen dargestellt sind, ist es leicht, x_a und y_a selbst zu ermitteln. Man betrachte die Grössen s, z'_1, z'_2 als Functionen von

$$\tau = \int^{\infty} \frac{ds}{2\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}},$$

und setze zunächst $\tau = 0$, so erhält man direct

$$\frac{x_a}{\sqrt{k_0}} \quad \text{oder} \quad \frac{x_a}{J}.$$

Differentiirt man aber die allgemeine Gleichung erst nach τ und setzt dann τ gleich Null, so erhält man offenbar

$$\frac{y_a}{J} - \frac{x_a J_1}{J^2}$$

und daraus mit Hülfe des erst ermittelten Werthes x_a die Grösse y_a. Sind aber einmal die Componenten des Impulses bestimmt, so erhält man die Componenten der Geschwindigkeit durch die Gleichungen:

$$u = a_1 x_1, \quad v = a_2 x_2, \quad w = a_3 x_3, \quad p = b_1 y_1, \quad q = b_2 y_2, \quad r = b_3 y_3.$$

§ 6.

Ueber einige Eigenschaften der hyperelliptischen Functionen und ihre Anwendung auf das vorliegende Problem.

Die Grössen x_a; y_a lassen eine bedeutende Vereinfachung und die Ausdrücke für die Componenten der Geschwindigkeit eine für die weitere Behandlung des Problems wichtige Umformung zu, Dank einiger Eigenschaften der hyperelliptischen Functionen, welche in diesem Abschnitt entwickelt werden sollen.

Es werde im Folgenden bezeichnet mit Z_a die Function:

$$(37.)\qquad Z_a = \sqrt{R(z_a - e_0)(z_a - e_1)(z_a - e_2)(z_a - e_3)(z_a - e_4)} \qquad (a = 1, 2)$$

und mit $\Phi(z)$ die Function $(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)(z-e_4)$, wo R, e_0, e_1, e_2, e_3, e_4 beliebige constante Grössen sein mögen. Ferner sei

$$(38.)\qquad H_a = \frac{\sqrt{(z_1-e_a)(z_2-e_a)}}{\sqrt{\Phi'(e_a)}} \qquad (a=1,2,3,4),$$

$$(39.)\qquad \Xi_a = \frac{H_a\sqrt{(z_1-e_0)(z_2-e_0)}}{(z_1-z_2)}\left\{\frac{Z_1}{(z_1-e_0)(z_1-e_a)}-\frac{Z_2}{(z_2-e_0)(z_2-e_a)}\right\}.$$

Dann bestehen folgende Gleichungen

$$(40.)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{a=1,2,3,4} H_a^2 = 0, & \sum\limits_{a=1,2,3,4} e_a H_a^2 = 1, \\ \sum\limits_{a=1,2,3,4} H_a \Xi_a = 0, & \sum\limits_{a=1,2,3,4} e_a H_a \Xi_a = 0, \\ \sum\limits_{a=1,2,3,4} \Xi_a^2 = R, & \sum\limits_{a=1,2,3,4} (e_a-e_0)\Xi_a^2 = 0, \\ \sum\limits_{a=1,2,3,4} \frac{H_a^2}{z_\beta - e_a} = 0 \quad (\beta=1,2), & \sum\limits_{a=1,2,3,4} \frac{H_a^2 e_a}{z_\beta-e_a} = 0 \quad (\beta=1,2). \end{cases}$$

Hieraus folgen, wenn

$$dw_1 = \frac{dz_1}{Z_1}+\frac{dz_2}{Z_2},$$

$$dw_2 = \frac{z_1\,dz_1}{Z_1}+\frac{z_2\,dz_2}{Z_2}$$

gesetzt wird, leicht folgende vier Gleichungen für die Differentiale dH_a:

$$\Sigma H_a dH_a = 0, \qquad \Sigma e_a H_a dH_a = 0,$$

$$\Sigma \Xi_a dH_a = -\tfrac{1}{2}R\sqrt{(z_1-e_0)(z_2-e_0)}\,dw_1, \qquad \Sigma e_a \Xi_a dH = -\tfrac{1}{2}R\sqrt{(z_1-e_0)(z_2-e_0)}\,dw_2.$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems,

$$\Delta = \begin{vmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \\ H_1 e_1 & H_2 e_2 & H_3 e_3 & H_4 e_4 \\ \Xi_1 & \Xi_2 & \Xi_3 & \Xi_4 \\ \Xi_1 e_1 & \Xi_2 e_2 & \Xi_3 e_3 & \Xi_4 e_4 \end{vmatrix},$$

hat einen ziemlich einfachen Werth.

Man erhält zunächst, wenn

$$\sqrt{(z_1-e_0)(z_2-e_0)}\left(\frac{Z_1 z_2}{z_1-e_0}-\frac{Z_2 z_1}{z_2-e_0}\right) = A, \quad -\sqrt{(z_1-e_0)(z_2-e_0)}\left(\frac{Z_1}{z_1-e_0}-\frac{Z_2}{z_2-e_0}\right) = B$$

gesetzt wird,

$$\Delta = \prod_{a=1,2,3,4} \frac{H_a}{(z_1-e_a)(z_2-e_a)} \frac{(A+Bz_1)(A+Bz_2)}{(z_1-z_2)^2} \begin{vmatrix} e_1^3 & e_2^3 & e_3^3 & e_4^3 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 & e_4^2 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= Z_1 Z_2 \prod_{a=1,2,3,4} \frac{1}{\sqrt{\Phi'(e_a)}\sqrt{(z_1-e_a)(z_2-e_a)}} \begin{vmatrix} e_1^3 & e_2^3 & e_3^3 & e_4^3 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 & e_4^2 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Bis auf das Vorzeichen muss nun die rechte Seite offenbar übereinstimmen mit $R\sqrt{(z_1-e_0)(z_2-e_0)}$; wir können also setzen

$$\Delta = \varepsilon R\sqrt{(z_1-e_0)(z_2-e_0)},$$

wo ε einen der Werthe ± 1 bezeichnet.

Bezeichnen wir nun mit $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ den Werth $+$ oder -1, jenachdem die Permutation $\alpha\beta\gamma\delta$ der Grössen 1, 2, 3, 4 gerade oder ungerade ist, so können wir schreiben

$$(41.)\qquad dH_\alpha = -\frac{\varepsilon\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}}{2} \begin{vmatrix} 0 & H_\beta & H_\gamma & H_\delta \\ 0 & e_\beta H_\beta & e_\gamma H_\gamma & e_\delta H_\delta \\ dw_1 & \Xi_\beta & \Xi_\gamma & \Xi_\delta \\ dw_2 & e_\beta \Xi_\beta & e_\gamma \Xi_\gamma & e_\delta \Xi_\delta \end{vmatrix},$$

und hieraus folgt leicht

$$(42.)\qquad \begin{cases} H_\delta dH_\alpha - H_\alpha dH_\delta = -\dfrac{\varepsilon\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}}{2} \begin{vmatrix} 0 & H_\beta & H_\gamma \\ dw_1 & \Xi_\beta & \Xi_\gamma \\ dw_2 & e_\beta \Xi_\beta & e_\gamma \Xi_\gamma \end{vmatrix} \\ \qquad = \dfrac{\varepsilon\,.\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}}{2} \{(dw_2 - e_\beta dw_1)\Xi_\beta H_\gamma - (dw_2 - e_\gamma dw_1) H_\beta \Xi_\gamma\}. \end{cases}$$

Für die Grössen $d\Xi_\alpha$ erhält man die Gleichungen:

$$\sum_{\alpha=1,2,3,4} H_\alpha d\Xi_\alpha = R\sqrt{(z_1-e_0)(z_2-e_0)}\,dw_1, \qquad \sum_{\alpha=1,2,3,4} e_\alpha H_\alpha d\Xi_\alpha = R\sqrt{(z_1-e_0)(z_2-e_0)}\,dw_2,$$

$$\sum_{\alpha=1,2,3,4} \Xi_\alpha d\Xi_\alpha = 0, \qquad \Sigma e_\alpha \Xi_\alpha d\Xi_\alpha = 0.$$

Sie ergeben die Ausdrücke:

$$(43.)\qquad d\Xi_\alpha = \frac{\varepsilon\,.\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}}{2} \begin{vmatrix} dw_1 & H_\beta & H_\gamma & H_\delta \\ dw_2 & e_\beta H_\beta & e_\gamma H_\gamma & e_\delta H_\delta \\ 0 & \Xi_\beta & \Xi_\gamma & \Xi_\delta \\ 0 & e_\beta \Xi_\beta & e_\gamma \Xi_\gamma & e_\delta \Xi_\delta \end{vmatrix}$$

und

$$
(44.)\left\{\begin{aligned}
\Xi_\delta d\Xi_\alpha - \Xi_\alpha d\Xi_\delta &= \frac{\varepsilon.\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}}{2}\begin{vmatrix} dw_1 & H_\beta & H_\gamma & H_\delta\Xi_\delta + H_\alpha\Xi_\alpha \\ dw_2 & e_\beta H_\beta & e_\gamma H_\gamma & e_\delta H_\delta\Xi_\delta + e_\alpha H_\alpha\Xi_\alpha \\ 0 & \Xi_\beta & \Xi_\gamma & \Xi_\delta^2 + \Xi_\alpha^2 \\ 0 & e_\beta\Xi_\beta & e_\gamma\Xi_\gamma & e_\delta\Xi_\delta^2 + e_\alpha\Xi_\alpha^2 \end{vmatrix}, \\
&= -R\frac{\varepsilon.\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}}{2}\begin{vmatrix} dw_1 & H_\beta & H_\gamma \\ dw_2 & e_\beta H_\beta & e_\gamma H_\gamma \\ 0 & (e_\beta - e_0)\Xi_\beta & (e_\gamma - e_0)\Xi_\gamma \end{vmatrix}, \\
&= -R\frac{\varepsilon.\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}}{2}\{(e_\beta - e_0)\Xi_\beta H_\gamma(dw_2 - e_\gamma dw_1) - (e_\gamma - e_0)\Xi_\gamma H_\beta(dw_2 - e_\beta dw_1)\}.
\end{aligned}\right.
$$

Weiter wird

$$
\begin{aligned}
\Xi_\delta dH_\alpha &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon.\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\begin{vmatrix} 0 & H_\beta & H_\gamma & H_\delta \\ 0 & e_\beta H_\beta & e_\gamma H_\gamma & e_\delta H_\delta \\ dw_1 & \Xi_\beta & \Xi_\gamma & \Xi_\delta \\ dw_2 & e_\beta\Xi_\beta & e_\gamma\Xi_\gamma & e_\delta\Xi_\delta \end{vmatrix}\Xi_\delta, \\
&= -\tfrac{1}{2}\varepsilon.\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{dw_2 - e_\alpha dw_1}{e_\delta - e_\alpha}\begin{vmatrix} 0 & H_\beta & H_\gamma & 1 \\ 0 & e_\beta H_\beta & e_\gamma H_\gamma & e_\delta \\ 1 & \Xi_\beta & \Xi_\gamma & 0 \\ e_\delta & e_\beta\Xi_\beta & e_\gamma\Xi_\gamma & 0 \end{vmatrix}\Xi_\delta H_\delta \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\varepsilon.\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{dw_2 - e_\delta dw_1}{e_\alpha - e_\delta}\begin{vmatrix} 0 & H_\beta & H_\gamma & H_\delta \\ 0 & e_\beta H_\beta & e_\gamma H_\gamma & e_\delta H_\delta \\ 1 & \Xi_\beta & \Xi_\gamma & \Xi_\delta \\ e_\alpha & e_\beta\Xi_\beta & e_\gamma\Xi_\gamma & e_\delta\Xi_\delta \end{vmatrix}\Xi_\delta.
\end{aligned}
$$

Hier lässt sich das zweite Glied noch umformen, indem man Ξ_δ als Factor zur letzten verticalen Reihe der Determinante zieht, und dann die vorhergehenden Verticalreihen nach der Multiplication mit Ξ_α^2, Ξ_β, Ξ_γ addirt. So ergiebt sich unter Benutzung der zwischen den Grössen Ξ_α, H_α bestehenden Gleichungen:

$$
\Xi_\delta dH_\alpha = -\tfrac{1}{2}\varepsilon.\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(e_\beta - e_\gamma)(e_\alpha - e_0)H_\beta H_\gamma R\frac{dw_2 - e_\delta dw_1}{e_\alpha - e_\delta} +
$$

$$+\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\begin{vmatrix} 0 & H_\beta & H_\gamma & 1 \\ 0 & e_\beta H_\beta & e_\gamma H_\gamma & e_\alpha \\ 1 & \Xi_\beta & \Xi_\gamma & 0 \\ e_\alpha & e_\beta \Xi_\beta & e_\gamma \Xi_\gamma & 0 \end{vmatrix} H_\alpha \Xi_\alpha \frac{dw_2 - e_\delta dw_1}{e_\alpha - e_\delta}$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & H_\beta & H_\gamma & 1 \\ 0 & e_\beta H_\beta & e_\gamma H_\gamma & e_\delta \\ 1 & \Xi_\beta & \Xi_\gamma & 0 \\ e_\delta & e_\beta \Xi_\beta & e_\gamma \Xi_\gamma & 0 \end{vmatrix} H_\delta \Xi_\delta \frac{dw_2 - e_\alpha dw_1}{e_\alpha - e_\delta} \Bigg\}.$$

Nachdem wir in ganz ähnlicher Weise $H_\alpha d\Xi_\delta$ berechnet haben, erhalten wir schliesslich

$$(45.)\quad \Xi_\delta dH_\alpha - H_\alpha d\Xi_\delta$$
$$= -\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\alpha - e_\delta}\{(e_\alpha - e_\delta) H_\beta H_\gamma R(dw_2 - e_\delta dw_1) - \Xi_\beta \Xi_\gamma (dw_2 - e_\alpha dw_1)\}.$$

Bezeichnen wir nun durch beigefügte Accente ein zweites ganz gleichartiges System von Grössen, so erhalten wir aus (42.) und (44.):

$$H'_\alpha H'_\delta \{\Xi_\delta d\Xi_\alpha - \Xi_\alpha d\Xi_\delta\} + \Xi'_\alpha \Xi'_\delta \{H_\delta dH_\alpha - H_\alpha dH_\delta\}$$
$$= -H_\gamma \Xi_\gamma \cdot \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\{(e_\beta - e_\delta) H'_\alpha H'_\delta R(dw'_2 - e_\gamma dw'_1) - \Xi'_\alpha \Xi'_\delta (dw'_2 - e_\beta dw'_1)\}$$
$$+ H_\beta \Xi_\beta \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\{(e_\gamma - e_\delta) H'_\alpha H'_\delta R(dw'_2 - e_\beta dw'_1) - \Xi'_\alpha \Xi'_\delta (dw'_2 - e_\gamma dw'_1)\}.$$

Nun lässt sich aber mit Hülfe der Formel (45.) die rechte Seite dieser Gleichung transformiren; es ergiebt sich, wenn

$$\frac{\partial}{\partial w'_1} f(w'_1, w'_2) dw_1 - \frac{\partial}{\partial w'_2} f(w'_1, w'_2) dw_2 = df(w'_1, w'_2)$$

gesetzt wird,

$$= \varepsilon\varepsilon' H_\gamma \Xi_\beta \frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\alpha - e_\delta}\{\Xi'_\gamma dH'_\beta - H'_\beta d\Xi'_\gamma\}$$
$$- \varepsilon\varepsilon' H_\beta \Xi_\gamma \frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\alpha - e_\delta}\{\Xi'_\beta dH'_\gamma - H'_\gamma d\Xi'_\beta\}.$$

Vertauschen wir aber in der so gewonnenen Gleichung β mit α und γ mit δ, sowie die gestrichenen Buchstaben mit den ungestrichenen, so gewinnen wir die Gleichung:

$$\Xi'_\alpha H'_\delta \{\Xi_\delta dH_\alpha - H_\alpha d\Xi_\delta\} - \Xi'_\delta H'_\alpha \{H_\delta d\Xi_\alpha - \Xi_\alpha dH_\delta\}$$
$$= \varepsilon\varepsilon' \frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\alpha - e_\delta}\{H_\beta H_\gamma (\Xi_\gamma d\Xi_\beta - \Xi_\beta d\Xi_\gamma) - \Xi_\beta \Xi_\gamma (H_\gamma dH_\beta - H_\beta dH_\gamma)\}.$$

Indem wir diese Gleichung von derjenigen subtrahiren, aus welcher sie so-

eben entstanden ist, erhalten wir folgende wichtige Relation:

$$(46.)\quad \begin{cases} (H'_\delta \Xi_\delta - H_\delta \Xi'_\delta)\left(\frac{\partial}{\partial w_1}\omega_1 + \frac{\partial}{\partial w_2}\omega_2\right)(H'_\alpha \Xi_\alpha - H_\alpha \Xi'_\alpha) \\ -(H'_\alpha \Xi_\alpha - H_\alpha \Xi'_\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial w_1}\omega_1 + \frac{\partial}{\partial w_2}\omega_2\right)(H'_\delta \Xi_\delta - H_\delta \Xi'_\delta) \\ = -\Big\{(H'_\gamma \Xi_\gamma - H_\gamma \Xi'_\gamma)\left(\frac{\partial}{\partial w'_1}\omega_1 + \frac{\partial}{\partial w'_2}\omega_2\right)(H'_\beta \Xi_\beta - H_\beta \Xi'_\beta) \\ -(H'_\beta \Xi_\beta - H_\beta \Xi'_\beta)\left(\frac{\partial}{\partial w'_1}\omega_1 + \frac{\partial}{\partial w'_2}\omega_2\right)(H'_\gamma \Xi_\gamma - H_\gamma \Xi'_\gamma)\Big\}\varepsilon\varepsilon'\frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\alpha - e_\delta}, \end{cases}$$

in welcher ω_1 und ω_2 ganz beliebige Grössen sind. Bedenken wir nun, dass das Product

$$\mathop{\Pi}_{\alpha=1,2,3,4}\sqrt{\Phi'(e_\alpha)} = \varepsilon''(e_1-e_2)(e_1-e_3)(e_1-e_4)(e_2-e_3)(e_2-e_4)(e_3-e_4)$$

ist, wo $\varepsilon'' = \pm 1$ ist, und dass demzufolge:

$$\frac{\sqrt{\Phi'(e_\beta)}\sqrt{\Phi'(e_\gamma)}}{\sqrt{\Phi'(e_\alpha)}\sqrt{\Phi'(e_\delta)}} = -\varepsilon''\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{e_\beta - e_\gamma}{e_\alpha - e_\delta}$$

wird, so kann die obige Gleichung unter Einführung der abkürzenden Bezeichnungen

$$(47.)\quad \begin{cases} \varepsilon.\varepsilon'\varepsilon'' = \bar{\varepsilon}, \\ P_\alpha = P_\alpha(w_1, w_2, w'_1, w'_2) = (H'_\alpha \Xi_\alpha - H_\alpha \Xi'_\alpha)\sqrt{\Phi'(e_\alpha)} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

kürzer folgendermassen geschrieben werden:

$$(48.)\quad \begin{cases} P_\delta\left(\frac{\partial}{\partial w_1}\omega_1 + \frac{\partial}{\partial w_2}\omega_2\right)P_\alpha - P_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial w_1}\omega_1 + \frac{\partial}{\partial w_2}\omega_2\right)P_\delta \\ = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\bar{\varepsilon}\Big\{P_\gamma\left(\frac{\partial}{\partial w'_1}\omega_1 + \frac{\partial}{\partial w'_2}\omega_2\right)P_\beta - P_\beta\left(\frac{\partial}{\partial w'_1}\omega_1 + \frac{\partial}{\partial w'_2}\omega_2\right)P_\gamma\Big\}. \end{cases}$$

Durch cyklische Vertauschung dreier der vier Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, z. B. von α, β, γ, erhält man noch zwei weitere Gleichungen. Multiplicirt man diese Gleichungen mit P_α, P_β, P_γ und addirt, so erhält man die folgende Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}P_\delta\left(\frac{\partial}{\partial w_1}\omega_1 + \frac{\partial}{\partial w_2}\omega_2\right)\sum_{\alpha=1,2,3,4}P_\alpha^2 - \Big(\sum_{\alpha=1,2,3,4}P_\alpha^2\Big)\left(\frac{\partial}{\partial w_1}\omega_1 + \frac{\partial}{\partial w_2}\omega_2\right)P_\delta = 0.$$

Aus ihr folgt, weil sie für $\delta = 1, 2, 3, 4$ gilt, unmittelbar

$$(49.)\quad P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 = 0;$$

es erfüllen also die drei Grössen

$$(50.)\quad A_\alpha = i\frac{P_\alpha}{P_4} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

die Bedingungen, welche die Richtungscosinus einer Geraden zu erfüllen haben; für diese Ausdrücke folgen aus Gleichung (48.) die Differentialgleichungen

$$(51.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial A_a}{\partial w_1}\omega_1+\dfrac{\partial A_a}{\partial w_2}\omega_2 \\ \quad = -\bar{\varepsilon}\varepsilon_{a\beta\gamma}i\Big(A_\gamma\Big(\dfrac{\partial A_\beta}{\partial w_1'}\omega_1+\dfrac{\partial A_\beta}{\partial w_2'}\omega_2\Big)-A_\beta\Big(\dfrac{\partial A_\gamma}{\partial w_1'}\omega_1+\dfrac{\partial A_\gamma}{\partial w_2'}\omega_2\Big)\Big).\end{cases}$$

Wenn wir nun

$$e_a = d_a^2 \quad (a=1,2,3),\quad e_4 = d_1^2 d_2^2 d_3^2,\quad e_0 = 0,\quad R = \frac{1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2}$$

setzen, so gehen die allgemeinen hyperelliptischen Functionen in diejenigen über, auf welche unser Problem geführt hat. Man übersieht leicht, dass man erhält

$$(35^a.)\qquad (x_a y_a' - y_a x_a')\sqrt{\varphi'(c_a)} = \frac{LL'}{\mu}P_a \qquad (a=1,2,3).$$

Wenn nun x_a, y_a ein System von Grössen ist, welches den algebraischen Integralgleichungen der vorliegenden Aufgabe genügt, und wenn

$$y_a' = \frac{\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}}{\sqrt{s-c_a}\sqrt{f(s)}\sqrt{\varphi'(c_a)}},\quad x_a' = -\frac{\sqrt{s-c_a}}{\sqrt{f(s)}\sqrt{\varphi'(c_a)}}$$

ist, so wird, wie schon hervorgehoben:

$$\frac{LL'}{\mu} = \{\sum_{a=1,2,3} P_a^2\}^{-\frac{1}{2}},$$

und das kann bei passender Wahl der in P_4 neu auftretenden Wurzeln gleich iP_4^{-1} gesetzt werden, so dass sich ergiebt

$$(35^b.)\qquad x_a\frac{\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}}{\sqrt{s-c_a}\sqrt{f(s)}}+y_a\frac{\sqrt{s-c_a}}{\sqrt{f(s)}} = i\frac{P_a}{P_4} \qquad (a=1,2,3).$$

Wenn wir aber in Gleichung (35^a.) x_a', y_a' als Functionen des beweglichen Werthepaares w_1', w_2' und der Grösse L' ansehen, so können wir differentiiren, und erhalten:

$$(x_a dy_a' - y_a dx_a')\sqrt{\varphi'(c_a)} = \frac{LL'}{\mu}\Big\{\frac{\partial P_a}{\partial w_1'}dw_1'+\frac{\partial P_a}{\partial w_2'}dw_2'+P_a d(\ln L')\Big\}.$$

Setzen wir nun für L_a', w_1', w_2' das System von Grössen, welches zu dem mehrerwähnten speciellen Grössensystem x_a', y_a' gehört, so erhalten wir

$$(x_a dy_a' - y_a dx_a')\sqrt{\varphi'(c_a)} = \frac{i}{P_4}\Big\{\frac{\partial P_a}{\partial w_1'}dw_1'+\frac{\partial P_a}{\partial w_2'}dw_2'+P_a d\ln L'\Big\}.$$

Um den Zusammenhang zwischen den Differentialen zu ermitteln, quadriren wir die Gleichung (35^a.) und summiren nach α; so erhalten wir

$$(52.)\qquad \sum_{\alpha=1,2,3}(x_\alpha y'_\alpha - y_\alpha x'_\alpha)^2\varphi'(c_\alpha) = -\frac{L^2L'^2}{\mu^2}P_4^2$$

und hieraus durch Differentiation:

$$(53.)\qquad \begin{cases} \sum_{\alpha=1,2,3}(x_\alpha y'_\alpha - y_\alpha x'_\alpha)(x_\alpha dy'_\alpha - y_\alpha dx'_\alpha)\varphi'(c_\alpha) \\ \qquad = -\frac{L^2L'^2}{\mu^2}P_4\left\{\frac{\partial P_4}{\partial w'_1}dw'_1 + \frac{\partial P_4}{\partial w'_2}dw'_2 + P_4 d\ln L'\right\}. \end{cases}$$

Setzen wir nun nicht nur für x'_α, y'_α das oben definirte specielle Werthsystem, sondern für x_α, y_α ein ähnliches derartiges System:

$$x_\alpha = \frac{\sqrt{t-c_\alpha}}{\sqrt{\varphi'(c_\alpha)}},\quad y_\alpha = \frac{\sqrt{(t-c_1)(t-c_2)(t-c_3)}}{\sqrt{t-c_\alpha}\sqrt{\varphi'(c_\alpha)}},$$

so wird die linke Seite der Gleichung (52.) identisch gleich Null und also auch

$$P_4 = 0,$$

d. h. der Quotient

$$\frac{\Xi'_4}{H'_4}$$

hat einen von dem speciellen Werthe s unabhängigen Werth. Umgekehrt führt, wie leicht zu beweisen, jedes Werthsystem w'_1, w'_2, für welches der in Frage stehende Quotient diesen Werth hat, auch auf ein Grössensystem von der Beschaffenheit

$$x'_\alpha = \lambda\frac{\sqrt{s-c_\alpha}}{\sqrt{\varphi'(c_\alpha)}},\quad y'_\alpha = \lambda\frac{\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}}{\sqrt{\varphi'(c_\alpha)}\sqrt{s-c_\alpha}}.$$

Setzen wir nun in die Gleichung (53.) für x_α, y_α, x'_α, y'_α die eben erwähnten Werthsysteme, so muss offenbar auch die rechte Seite dieser Gleichung verschwinden, sodass unter der gemachten Annahme

$$\sum_{\alpha=1,2,3}\varphi'(c_\alpha)(x_\alpha y'_\alpha - y_\alpha x'_\alpha)(x_\alpha dy'_\alpha - y_\alpha dx'_\alpha) = 0$$

wird.

Bei der völligen Willkür bezüglich der Grösse t zerfällt diese Gleichung in die folgenden vier:

$$(54.)\qquad \begin{cases} \Sigma x'_\alpha dx'_\alpha = 0,\quad \Sigma c_\alpha x'_\alpha dx'_\alpha + \Sigma y'_\alpha dy'_\alpha = 0, \\ -c_1c_2c_3\Sigma\frac{x'_\alpha}{c_\alpha}dx'_\alpha + \Sigma c_\alpha y'_\alpha dy'_\alpha = 0,\quad \Sigma x'_\alpha dy'_\alpha + \Sigma y'_\alpha dx'_\alpha = 0. \end{cases}$$

Dass diese Gleichungen aber nicht unabhängig von einander sind, sondern

nur drei Gleichungen repräsentiren, erkennt man daraus, dass die Gleichung, aus welcher sie entspringen, erfüllt ist, wenn $x_a = x'_a$, $y_a = y'_a$ ganz unabhängig von den Werthen der Grössen dx'_a, dy'_a. Nun findet man sehr leicht folgende drei particuläre Lösungen der vorliegenden Gleichungen, nämlich

$$\begin{array}{lcccccc} \text{I.} & y'_1, & y'_2, & y'_3, & c_1x'_1, & c_2x'_2, & c_3x'_3, \\ \text{II.} & c_1y'_1, & c_2y'_2, & c_3y'_3, & -c_2c_3x'_1, & -c_3c_1x'_2, & -c_1c_2x'_3, \\ \text{III.} & 0, & 0, & 0, & x'_1, & x'_2, & x'_3; \end{array}$$

sodass allgemein geschrieben werden kann:

$$(55.) \qquad dx'_a = \tau_1 y'_a + \tau_2 c_a y'_a, \quad dy'_a = \tau_1 c_a x'_a - \tau_2 \frac{c_1c_2c_3}{c_a} x'_a + \tau_3 x'_a.$$

Die zugehörigen Werthe dL', dw'_1, dw'_2 erhält man durch Differentiation aus den Gleichungen

$$\Sigma r'^2_{\beta a} = L'^2, \quad \Sigma \frac{\eta'^2_a}{z'_\beta - d^2_a} = 0 \qquad (\beta = 1, 2),$$

nämlich

$$(56.) \begin{cases} L'dL' = \Sigma r'_{\beta a} dr'_{\beta a}, \\ dw'_1 = \dfrac{dz_1}{Z_1} + \dfrac{dz_2}{Z_2} \\ \quad = 2d_1^2d_2^2d_3^2 \Sigma \dfrac{\eta'_a d\eta'_a}{(z'_1 - z'_2)} \left(\dfrac{Z'_1}{z'_1(z'_1 - d^2_a)(z'_1 - d^2_1d^2_2d^2_3)} - \dfrac{Z'_2}{z'_2(z'_2 - d^2_a)(z'_2 - d^2_1d^2_2d^2_3)} \right), \\ dw'_2 = 2d_1^2d_2^2d_3^2 \Sigma \dfrac{\eta'_a d\eta'_a}{z'_1 - z'_2} \left\{ \dfrac{Z'_1}{(z'_1 - d^2_a)(z'_1 - d^2_1d^2_2d^2_3)} - \dfrac{Z'_2}{(z'_2 - d^2_a)(z'_2 - d^2_1d^2_2d^2_3)} \right\}. \end{cases}$$

Wir lassen jetzt s unendlich gross werden, und zwar nehmen wir ein solches Werthsystem, bei welchem die vier Wurzeln

$$\sqrt{s - c_\epsilon}, \quad \sqrt{(s - c_1)(s - c_2)(s - c_3)}$$

das gleiche Zeichen haben, und $\sqrt{f(s)}$ dasselbe Zeichen wie J hat, dann werden die Grössen

$$x'_\epsilon = 0, \quad y'_\epsilon = \frac{1}{J\sqrt{\varphi'(c_\epsilon)}}.$$

Die Grössen dx'_ϵ, dy'_ϵ werden dann weiter, falls

$$-\lim \frac{\tau_2}{J\sqrt{s}} = \tau_3$$

gesetzt wird:

$$(55^*.) \qquad dx'_\epsilon = \frac{\tau_1 - c_\epsilon \tau_2}{J\sqrt{\varphi'(c_\epsilon)}}, \quad dy'_\epsilon = \frac{\tau_3}{\sqrt{\varphi'(c_\epsilon)}}.$$

Wir betrachten zunächst den Fall $\tau_2 = \bar{\tau}_3 = 0$ und setzen

$$(57.)\qquad dw_1' = -\frac{f_1'\tau_1}{J},\quad dw_2' = -\frac{f_2'\tau_1}{J},\quad \frac{dL'}{L'} = -\frac{f_3'\tau_1}{J};$$

die Grössen f_1' und f_2' haben dann, wie leicht zu erkennen, die für das Folgende wichtige Eigenschaft, dass

$$\frac{\partial}{\partial w_1'}\Big(\frac{\Xi_4'}{H_4'}\Big)f_1' + \frac{\partial}{\partial w_2'}\Big(\frac{\Xi_4'}{H_4'}\Big)f_2' = 0$$

ist.

Setzen wir aber

$$\tau_1 = m' b_1 b_2 b_3 \tau,\quad \tau_2 = -m b_1 b_2 b_3 \tau,\quad \bar{\tau}_3 = 0,$$

so dass also mit Rücksicht auf Gleichung (17.)

$$dx_a' = \frac{b_a \tau}{J\sqrt{\varphi'(c_a)}},\quad dy_a' = 0$$

wird, so mögen werden:

$$(58.)\qquad dw_1' = -\frac{f_1\tau}{J},\quad dw_2' = -\frac{f_2\tau}{J},\quad \frac{dL'}{L'} = -\frac{f_3\tau}{J}.$$

Auf diese Weise erhalten wir

$$(59^a.)\qquad x_a = Ji\frac{P_a}{P_4},$$

$$(59^b.)\qquad y_a = \frac{i}{P_4}\Big(\frac{\partial P_a}{\partial w_1'}f_1' + \frac{\partial P_a}{\partial w_2'}f_2' + P_a f_3'\Big)$$

und

$$(59^c.)\qquad b_a y_a = \frac{i}{P_4}\Big(\frac{\partial P_a}{\partial w_1'}f_1 + \frac{\partial P_a}{\partial w_2'}f_2 + P_a f_3\Big).$$

Um nun die Abhängigkeit der Grössen w_1 und w_2 von der Zeit zu finden, verfahren wir folgendermassen:

Es ist nach den Differentialgleichungen des Problems

$$\frac{dx_a}{dt} = \frac{\partial x_a}{\partial w_1}\frac{dw_1}{dt} + \frac{\partial x_a}{\partial w_2}\frac{dw_2}{dt} = \varepsilon_{a\beta\gamma}(b_\beta y_\beta x_\gamma - b_\gamma y_\gamma x_\beta)$$

$$= J\varepsilon_{a\beta\gamma}\Big\{A_\gamma\Big(\frac{\partial A_\beta}{\partial w_1'}f_1 + \frac{\partial A_\beta}{\partial w_2'}f_2\Big) - A_\beta\Big(\frac{\partial A_\gamma}{\partial w_1'}f_1 + \frac{\partial A_\gamma}{\partial w_2'}f_2\Big)\Big\},$$

und das ist nach Gleichung (51.) nichts anderes als

$$i\bar{\varepsilon}\Big(\frac{\partial x_a}{\partial w_1}f_1 + \frac{\partial x_a}{\partial w_2}f_2\Big).$$

Man erhält also für w_1 und w_2 die Gleichungen

$$(60.)\qquad dw_1 = i\bar{\varepsilon}f_1\,dt,\quad dw_2 = i\bar{\varepsilon}f_2\,dt.$$

Wir schliessen hieran die Ableitung von Formeln für die Componenten der Fortschreitungsgeschwindigkeit, welche sich für die weitere Behandlung des Problems geeigneter erweisen als diejenigen, welche man direct aus

$$u = a_1 x_1, \quad v = a_2 x_2, \quad w = a_3 x_3$$

erhält.

Die Formel

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial w_1} i\varepsilon f_1 + \frac{\partial A_\alpha}{\partial w_2} i\varepsilon f_2$$
$$= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left\{A_\gamma \frac{i}{P_4}\left(\frac{\partial P_\beta}{\partial w_1'} f_1 + \frac{\partial P_\beta}{\partial w_2'} f_2 + P_\beta f_3\right) - A_\beta \frac{i}{P_4}\left(\frac{\partial P_\gamma}{\partial w_1'} f_1 + \frac{\partial P_\gamma}{\partial w_2'} f_2 + P_\gamma f_3\right)\right\}$$

gilt für alle Werthsysteme (w_1', w_2'); es kann auf dieselbe also auch erst die Operation

$$\underset{w'}{\Delta}(U) = \frac{\partial U}{\partial w_1'} f_1' + \frac{\partial U}{\partial w_2'} f_2' + U\left(f_3' + \frac{\partial \ln \Xi_4'}{\partial w_1'} f_1' + \frac{\partial \ln \Xi_4'}{\partial w_2'} f_2'\right)$$

angewendet werden, und dann erst für w_1', w_2' dasjenige Werthsystem gesetzt werden, welches wir bei Bildung der Ausdrücke x_α, y_α, $b_\alpha y_\alpha$ benutzt hatten. Für dieses ist aber

$$\frac{\partial \ln \Xi_4'}{\partial w_1'} f_1' + \frac{\partial \ln \Xi_4'}{\partial w_2'} f_2' = \frac{\partial \ln H_4'}{\partial w_1'} f_1' + \frac{\partial \ln H_4'}{\partial w_2'} f_2'$$

und in Folge dessen auch gleich

$$\frac{\partial \ln P_4}{\partial w_1'} f_1' + \frac{\partial \ln P_4}{\partial w_1'} f_2'.$$

Auf $A_\alpha = i\frac{P_\alpha}{P_4}$ angewendet, giebt demnach die fragliche Operation

$$\frac{i}{P_4}\left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial w_1'} f_1' + \frac{\partial P_\alpha}{\partial w_2'} f_2' + P_\alpha f_3'\right) = y_\alpha,$$

sodass wir die Gleichung erhalten:

$$\frac{dy_\alpha}{dt} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(b_\beta - b_\gamma) y_\beta y_\gamma + \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}{J}\left\{x_\gamma\left(\frac{\partial b_\beta y_\beta}{\partial w_1'} f_1' + \frac{\partial b_\beta y_\beta}{\partial w_2'} f_2'\right)\right.$$
$$\left. - x_\beta\left(\frac{\partial b_\gamma y_\gamma}{\partial w_1'} f_1' + \frac{\partial b_\gamma y_\gamma}{\partial w_2'} f_2'\right)\right\}.$$

Es war aber andererseits

$$\frac{dy_\alpha}{dt} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(b_\beta - b_\gamma) y_\beta y_\gamma + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(a_\beta - a_\gamma) x_\beta x_\gamma.$$

Es darf also, wenn die in der folgenden Formel auftretende Grösse f_3'' passend bestimmt wird,

$$(59^d.) \qquad a_\alpha x_\alpha = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial b_\alpha y_\alpha}{\partial w_1'} f_1' + \frac{\partial b_\alpha y_\alpha}{\partial w_2'} f_2' + x_\alpha f_3''\right) \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

gesetzt werden. Sowohl die linke Seite als auch der erste Theil der rechten Seite sind Brüche, deren Zähler lineare Functionen von Ξ_a, H_a, deren Nenner lineare Functionen von Ξ_4, H_4 sind. Man erkennt hieraus sofort, dass f_3'' von w_1 und w_2 unabhängig sein muss. Um den Werth dieser Constanten f_3'' zu berechnen, multipliciren wir die vorstehende Gleichung mit x_a und addiren nach α, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_a a_a x_a^2 &= f_3''J+\Sigma x_a\Big(\frac{\partial b_a y_a}{\partial w_1'}f_1'+\frac{\partial b_a w_a}{\partial w_2'}f_2'\Big)\\ &= f_3''J-\Sigma b_a y_a\Big(\frac{\partial x_a}{\partial w_1'}f_1'+\frac{\partial x_a}{\partial w_2'}f_2'\Big)+\frac{\partial \Sigma x_a b_a y_a}{\partial w_1'}f_1'+\frac{\partial \Sigma x_a b_a y_a}{\partial w_2'}f_2'\\ &= f_3''J-\sum_a b_a y_a^2+(\Sigma b_a y_a x_a)\Big(\frac{\partial \ln P_4}{\partial w_1'}f_1'+\frac{\partial \ln P_4}{\partial w_2'}f_2'+f_3'\Big)\\ &\qquad+\frac{\partial \Sigma x_a b_a y_a}{\partial w_1'}f_1'+\frac{\partial \Sigma x_a b_a y_a}{\partial w_2'}f_2'.\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}\Sigma x_a b_a y_a &= \frac{1}{2J}\Big(\frac{\partial \Sigma x_a^2}{\partial w_1'}f_1+\frac{\partial \Sigma x_a^2}{\partial w_2'}f_2\Big)+\frac{\Sigma x_a^2}{J}\Big(f_3+\frac{\partial \ln P_4}{\partial w_1'}f_1+\frac{\partial \ln P_4}{\partial w_2'}f_2\Big)\\ &= J\Big(\frac{\partial \ln P_4}{\partial w_1'}f_1+\frac{\partial \ln P_4}{\partial w_2'}f_2+f_3\Big).\end{aligned}$$

Da nun $\Sigma x_a^2 a_a+\Sigma b_a y_a^2$ die doppelte lebendige Kraft ist, so erhalten wir

$$(61.)\quad \left\{\begin{aligned}&f_3''+f_3f_3'+\frac{1}{P_4}f_3\Big(\frac{\partial P_4}{\partial w_1'}f_1'+\frac{\partial P_4}{\partial w_2'}f_2'\Big)+\frac{f_3'}{P_4}\Big(\frac{\partial P_4}{\partial w_1'}f_1+\frac{\partial P_4}{\partial w_2'}f_2\Big)\\ &\qquad+\frac{1}{P_4}\Big(\frac{\partial}{\partial w_1'}f_1'+\frac{\partial}{\partial w_2'}f_2'\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial w_1'}f_1+\frac{\partial}{\partial w_2'}f_2\Big)P_4 = \frac{L}{J}.\end{aligned}\right.$$

Der so gewonnene Ausdruck für f_3'' enthält noch w_1, w_2 offenbar aber nur scheinbar; wir haben nur für w_1, w_2 ein beliebiges constantes Werthepaar zu setzen, um den wirklichen Werth f_3'' zu erhalten.

Wir bemerken noch, dass bei der Bildung der Ausdrücke x_a, y_a, $b_a y_a$, $a_a x_a$, sowie bei der Definition der Grössen dw_β, dw_β', f_β, f_β' statt der Function $Z=\sqrt{z(z-d_1^2)(z-d_2^2)(z-d_3^2)\Big(\frac{z}{d_1^2d_2^2d_3^2}-1\Big)}$ die Wurzel aus dem negativ genommenen Ausdruck hätte benutzt werden können, ohne dass die Formeln ihre Gültigkeit verlieren; es empfiehlt sich das dann besonders, wenn das ursprünglich benutzte Z bei reellem z imaginäre Werthe annimmt.

Es kann ferner vorkommen, dass die sämmtlichen Nullstellen von Z sowie die Grössen z_1 und z_2 rein imaginär werden. Setzt man dann statt der ursprünglich eingeführten Grössen id_a^2, iz_β, so bleiben die gewonnenen Resultate ebenfalls der Form nach völlig ungeändert.

Sur une question de la théorie des nombres.

(Par M. *D. Mirimanoff* à Genève.)

Soient θ une racine primitive de l'équation $x^\lambda - 1 = 0$ (λ étant premier), H le nombre des classes des nombres idéaux formés avec θ, a le premier et $b = \frac{H}{a}$ le second facteur du nombre H *). Je suppose que le nombre H soit divisible par λ; dans ce cas λ divise le facteur a; quant au facteur b, il peut ne pas être divisible par λ; M. *Kummer* a fait voir, en effet, que le facteur b ne contient pas λ pour $\lambda = 37$, 59 et 67 qui sont les seules valeurs de λ inférieures à 100 et telles que $a \equiv 0 \pmod{\lambda}$ **).

Je vais donner un nouveau critérium de la divisibilité de b par λ. Posons

$$\lambda = 2\nu + 1, \quad e(\theta) = \frac{(1-\theta^g)(1-\theta^{-g})}{(1-\theta)(1-\theta^{-1})}, \quad e_x = e(\theta^{g^x}) \quad (x = 0, 1, 2, \ldots \nu - 1),$$

g étant une racine primitive pour le module λ. Le facteur b est divisible par λ, s'il existe un système d'exposants entiers $m_0, m_1, \ldots, m_{\nu-3}, m_{\nu-2}$ tels que $e_0^{m_0} e_1^{m_1} \ldots e_{\nu-2}^{m_{\nu-2}}$ soit égale à une puissance $\lambda^{\text{ième}}$, sans que tous les m soient divisibles par λ.

Posons, comme l'a fait M. *Kronecker* dans sa Dissertation inaugurale „De unitatibus complexis" (t. 93 de ce Journal):

$$e_0^{m_0} e_1^{m_1} \ldots e_{\nu-2}^{m_{\nu-2}} = e^{m_0 + m_1 x + \cdots + m_{\nu-2} x^{\nu-2}} = e^{m(x)};$$

il viendra

$$(e^{m(x)})^{n(x)} = e^{m(x) n(x)},$$

pourvu qu'on réduise l'exposant $m(x) n(x)$ à l'aide de la formule

$$x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \cdots + x + 1 = 0 \text{ ***}).$$

---

*) *Kummer*, t. 40, p. 113.

**) Abhandlungen der Berliner Akademie, année 1857.

***) t. 93, p. 32.

Introduisons les unités appartenant aux différents diviseurs du nombre $\nu = \frac{\lambda - 1}{2}$.

Soient d un diviseur quelconque de ν; $p, q, \ldots$ les différents diviseurs premiers de d; posons $\nu = \delta . d$. Une unité ε appartient au diviseur d, si

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{d+x} = \cdots = \varepsilon_{(\delta-1)d+x},$$
$$\varepsilon_x . \varepsilon_{\frac{d}{p}+x} \ldots \varepsilon_{(p-1)\frac{d}{p}+x} = 1,$$
$$\varepsilon_x . \varepsilon_{\frac{d}{q}+x} \ldots \varepsilon_{(q-1)\frac{d}{q}+x} = 1.$$

Dans ces formules ε_x est mis à la place de $\varepsilon(\theta^{g^x})$ *). Si ε est une unité appartenant au diviseur d, le symbole $\varepsilon^{m(x)}$ peut être remplacé par $\varepsilon^{m(r_d)}$, r_d étant une racine primitive de l'équation $z^d - 1 = 0$. Je ne considérerai ici que les unités ε données par la formule

$$\overset{(d)}{\varepsilon} = e^{(1+x^d+\cdots+x^{(\delta-1)d})(1-x^{\frac{d}{p}})(1-x^{\frac{d}{q}})\ldots}.$$

Soient $d_1, d_2, \ldots, d_x$ les différents diviseurs de ν; on a le théorème suivant:

Si $e^{m(x)}$ est une puissance $\lambda^{\text{ième}}$, $m(x)$ étant premier à λ, l'une au moins des unités $\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{m(r_{d_i})}$ satisfait à la condition

$$\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{m(r_{d_i})} = \text{puiss.}\,\lambda^{\text{ième}},$$

sans que $m(r_{d_i})$ soit divisible par λ.

Et réciproquement:

Si l'unité $\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{m(r_{d_i})}$ est une puissance $\lambda^{\text{ième}}$, sans que λ divise $m(r_{d_i})$, il existe toujours un exposant $n(x)$ premier à λ et tel que $e^{n(x)}$ soit une puissance λ^{ieme}.

Si donc b est divisible par λ, on a pour une certaine valeur de i

$$\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{m(r_{d_i})} = \text{puiss.}\,\lambda^{\text{ième}},$$

l'exposant $m(r_{d_i})$ étant premier à λ.

Cette condition est nécessaire et suffisante.

Si $\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{m(r_{d_i})}$ est effectivement égale à une puissance $\lambda^{\text{ième}}$, l'unité $\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{Nm(r_{d_i})}$

*) t. 93, p. 42.

est aussi une puissance $\lambda^{\text{ième}}$, $Nm(r_{d_i})$ étant la norme de $m(r_{d_i})$ étendue à toutes les racines primitives de $z^{d_i}-1=0$.

Or $\overset{(d_i)}{\varepsilon}$ n'est pas une puissance $\lambda^{\text{ième}}$; par conséquent la norme $Nm(r_{d_i})$ est divisible par λ.

Soient maintenant $f_1, f_2, \ldots, f_j$ les facteurs de λ qui divisent $m(r_{d_i})$, je suppose que ces facteurs soient contenus $n_1, n_2, \ldots, n_j$ fois dans $m(r_{d_i})$; posons $R(r) = f_1^{n_1} f_2^{n_2} \ldots f_j^{n_j}$. Soit $S(r)$ un nombre complexe tel que $R(r)S(r)$ soit un nombre existant, il viendra

$$\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{R(r)S(r)} = \text{puiss.}\, \lambda^{\text{ième}}.$$

Je supposerai pour plus de clarté que les facteurs f soient des nombres existants, on a dans ce cas

$$(1.)\qquad \overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{R(r)} = \text{puiss.}\, \lambda^{\text{ième}}.$$

Or tout nombre complexe $M(r)$ formé avec une racine primitive de $z^d-1=0$ satisfait à la congruence $M(r)^\lambda \equiv M(r)$ (mod. λ). Cette congruence permet de rabaisser les exposants $n_1, n_2, \ldots, n_j$ au-dessous de λ dans (1.). Si l'on élève ensuite l'égalité (1.) ainsi transformée à la puissance $f_1^{\lambda-n_1} f_2^{\lambda-n_2} \ldots f_j^{\lambda-n_j}$ et que de nouveau, on fasse usage de la même congruence, on arrive à l'égalité

$$(2.)\qquad \overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{f_1 f_2 \ldots f_j} = \text{puiss.}\, \lambda^{\text{ième}}.$$

On a donc ce théorème:

Pour que $\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{m(r_{d_i})}$ soit une puissance $\lambda^{\text{ième}}$, sans que $m(r_{d_i})$ soit divisible par λ, il faut et il suffit que $\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{\frac{\lambda}{f_l}}$ soit une puissance $\lambda^{\text{ième}}$ pour une certaine valeur de l.

§ 2.

L'égalité $\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{\frac{\lambda}{f_l}} = \text{puiss.}\, \lambda^{\text{ième}}$ entraîne la congruence

$$\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{\frac{\lambda}{f_l}} \equiv 1 \pmod{\lambda}.$$

Posons $\nu = \delta_i d_i$ et soient $c_0 = 1,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{\varphi(d_i)-1}$ les nombres premiers et inférieurs à d_i, rangés dans l'ordre croissant, il viendra

$$\Pi_j(g^{2\delta_i x} - r^{c_j}) \equiv 0 \pmod{\lambda} \qquad (j = 0, 1, \ldots, \varphi(d_i)-1),$$

r étant une racine primitive de $x^{d_i}-1=0$ et le nombre $\varkappa$ étant premier à d_i. Il est permis de remplacer les facteurs f figurant dans l'exposant $\frac{\lambda}{f_i}$ par les différences correspondantes $(g^{2\delta_i\varkappa}-r^{c_j})$.

Soit maintenant ε_0 l'unité $\overset{(d_i)}{\varepsilon}$ ou une puissance complexe quelconque de cette unité. Développons ε_0 suivant les puissances croissantes de $t=1-\theta$ et soit

$$\varepsilon_0 \equiv 1+at^{\alpha}+bt^{\alpha+1}+\cdots \pmod{\lambda}.$$

Il viendra

$$\varepsilon_j = \varepsilon_0(\theta^{g^j}) \equiv 1+ag^{j\alpha}t^{\alpha}+\cdots \pmod{\lambda} \qquad (j=1,2,\ldots,\varphi(d_i)-1).$$

Le nombre α est nécessairement de la forme $2\delta_i\varkappa'$, $\varkappa'$ étant un nombre de la série $1, c_1, c_2, \ldots, c_{\varphi(d_i)-1}$. Élevons ε_0 à la puissance $g^{2\delta_i\varkappa}-r^{c_j}$; le coefficient de t^{α} du résultat sera congru à $a(g^{2\delta_i\varkappa}-g^{2\delta_i c_j\varkappa'})$. Ce coefficient est nul suivant λ si $\varkappa\equiv c_j\varkappa' \pmod{d_i}$, et comme cette congruence n'a qu'une seule racine en c, il existe toujours un facteur f tel que le coefficient de t^{α} dans ε_0^f soit congru à 0 suivant λ et il n'en existe qu'un seul.

En désignant toujours par t^{α} le premier terme qui ne soit pas divisible par λ dans le développement de ε, à chaque valeur du nombre α correspond un seul facteur f tel que le coefficient de t^{α} dans ε^f soit nul suivant λ. Soient $f_1, f_{c_1}, f_{c_2}, \ldots, f_{c_{\varphi(d_i)-1}}$ les facteurs de λ qui correspondent à $\alpha=2\delta_i, 2\delta_i c_1, \ldots, 2\delta_i c_{\varphi(d_i)-1}$. On démontre sans peine le théorème suivant: Si les coefficients de $t^{2\delta_i}$ dans $\overset{(d_i)}{\varepsilon}$, de $t^{2\delta_i c_1}$ dans $\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{f_1}$, de $t^{2\delta_i c_2}$ dans $\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{f_1 f_{c_1}}, \ldots$, de $t^{2\delta_i c_{\varphi(d_i)-1}}$ dans $\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{f_1 f_{c_1}\cdots f_{c_{\varphi(d_i)-2}}}$ ne sont pas nuls suivant λ, il n'existe pas d'exposant $m(r)$ tel que $\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{m(r)}\equiv 1 \pmod{\lambda}$ sans que λ divise $m(r)$. Et il en existe un nécessairement si l'une au moins de ces conditions n'est pas remplie.

Je suppose que l'exposant $\frac{\lambda}{f_{c_j}}$ vérifie la congruence $\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{\frac{\lambda}{f_{c_j}}}\equiv 1 \pmod{\lambda}$. Restera à voir si $\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{\frac{\lambda}{f_{c_j}}}$ est effectivement une puissance $\lambda^{\text{ième}}$. Soient $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{d_i-1}$ les périodes à $2\delta_i$ termes, posons

$$M_\varkappa = \sqrt[\lambda]{\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}_{d_i-\varkappa}^{\frac{\lambda}{f_{c_j}}}} \qquad (\varkappa=0,1,2,\ldots,d_i-1$$

et

$$M_x = a_0\gamma_{d_i-x} + a_1\gamma_{d_i+1-x} + \cdots + a_{d_i-1}\gamma_{2d_i-1-x} \qquad (x = 0, 1, \ldots, d_i-1).$$

Pour que $\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{\frac{\lambda}{f_{c_j}}}$ soit une puissance $\lambda^{\text{ième}}$, il faut et il suffit que les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{d_i-1}$ soient des nombres entiers.

§ 3.

Cas de $\lambda = 37$.

Soient

$$\theta = \cos\frac{2\pi}{37} + i\sin\frac{2\pi}{37}, \quad g = 5, \quad \gamma_x = \theta^{g^x} + \theta^{-g^x},$$

il viendra

$$e = \frac{(1-\theta^5)(1-\theta^{-5})}{(1-\theta)(1-\theta^{-1})} = (1+\gamma_0+\gamma_{11})^2.$$

Posons

$$\sqrt{e} = 1+\gamma_0+\gamma_{11}.$$

Je désignerai par $\overset{(d_i)}{\varepsilon}$ l'unité

$$(\sqrt{e})^{\left(1+x^{d_i}+\cdots+x^{(\delta_i-1)d_i}\right)\left(1-x^{\frac{d_i}{p}}\right)\left(1-x^{\frac{d_i}{q}}\right)\cdots}.$$

Soit d'abord

$$d_i = 18, \quad \delta_i = 1,$$

$$c_1 = 5, \quad c_2 = 7, \quad c_3 = 11, \quad c_4 = 13, \quad c_5 = 17.$$

Les facteurs $f_1, f_5, f_7, \ldots, f_{17}$ peuvent être remplacés par les différences

$$(4-r^{11}), \quad (4-r^{13}), \quad (4-r^{17}), \quad (4-r), \quad (4-r^5), \quad (4-r^7).$$

On formera d'abord

$$\overset{(18)}{\varepsilon_0}{}^{4-r^{11}};$$

il viendra

$$\overset{(18)}{\varepsilon_0}{}^{4-r^{11}} \equiv 1+21t^{10}+31t^{11}+\cdots \quad (\text{mod. } 37).$$

Le coefficient de t^{10} n'étant pas nul suivant 37, on formera $\overset{(18)}{\varepsilon_0}{}^{(4-r^{11})(4-r^{13})}$:

$$\overset{(18)}{\varepsilon_0}{}^{(4-r^{11})(4-r^{13})} = 1+17t^{14}+8t^{15}+\cdots.$$

Il vient ensuite

$$\overset{(18)}{\varepsilon_0}{}^{(4-r^{11})(4-r^{13})(4-r^{17})} \equiv 1+5t^{22}+18t^{23}+\cdots,$$

$$\overset{(18)}{\varepsilon_0}{}^{(4-r^{11})\ldots(4-r)} \equiv 1+3t^{26}+2t^{27}+\cdots,$$

$$\overset{(18)}{\varepsilon_0}{}^{(4-r^{11})\ldots(4-r^5)} \equiv 1+16t^{34}+13t^{35}+\cdots.$$

La congruence $\overset{(d_i)}{\varepsilon_0}{}^{\frac{37}{f_c}} \equiv 1$ (mod. 37) ne peut donc avoir lieu pour $d_i = 18$.

Les unités appartenant au diviseur 18 jouissent de la propriété suivante qu'on établira sans peine: toute unité qui est congrue à un nombre entier suivant $(1-\theta)^{10}$ est une puissance $f_1^{\text{ième}}$; toute unité qui est congrue à un nombre entier suivant $(1-\theta)^{14}$ est une puissance $f_1 f_5^{\text{ième}}$ etc. ...

Ce théorème est analogue au théorème suivant de M. ***Kummer:*** Si le premier facteur du nombre des classes n'est pas divisible par λ, toute unité congrue à un nombre entier suivant λ est une puissance $\lambda^{\text{ième}}$ *).

On verra de même que la congruence $\overset{(d_i)}{\varepsilon}{}^{\frac{\lambda}{f_c}} \equiv 1$ ne peut avoir lieu, si $d_i = 6, 3, 2$. Le cas de $d_i = 9$ fait seul exception.

Soient $\gamma'_0 = \gamma_0 + \gamma_9$ et $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_8$ les conjuguées de γ'_0.

$$\overset{(9)}{\varepsilon}_0 = (\sqrt{e})^{(1+x^{9})(1-x^{3})} = \gamma'_0 - \gamma'_1 - 2\gamma'_4 - 3\gamma'_5 - 2\gamma'_6 - 2\gamma'_8.$$

Soit r une racine primitive de $x^9 - 1 = 0$, les facteurs $f_1, f_2, f_4, f_5, f_7, f_8$ de 37 peuvent être remplacés par les différences $(4+r)$, $(4+r^5)$, $(4+r^7)$, $(4+r^2)$. $(4+r^4)$, $(4+r^8)$.

Il viendra

$$\overset{(9)}{\varepsilon}{}_0^{4+r} \equiv 1 + 3t^8 + 12t^9 + \cdots,$$

$$\overset{(9)}{\varepsilon}{}_0^{(4+r)(4+r^5)} \equiv 1 + 30t^{16} + 18t^{17} + \cdots,$$

$$\overset{(9)}{\varepsilon}{}_0^{(4+r)\ldots(4+r^7)} \equiv 1 + 5t^{20} + 13t^{21} + \cdots,$$

$$\overset{(9)}{\varepsilon}{}_0^{(4+r)\ldots(4+r^2)} \equiv 1 + 25t^{28} + 17t^{29} + \cdots$$

et enfin

$$\overset{(9)}{\varepsilon}{}_0^{(4+r)\ldots(4+r^4)} \equiv 1 \pmod{37}.$$

Ainsi

$$\overset{(9)}{\varepsilon}{}^{\frac{37}{f_8}} \equiv 1 \pmod{37}.$$

Reste à voir, si $\overset{(9)}{\varepsilon}{}^{\frac{37}{f_8}}$ est effectivement une puissance $37^{\text{ième}}$.

Posons

$$M_x = a_0\gamma'_{9-x} + a_1\gamma'_{10-x} + \cdots + a_8\gamma'_{17-x} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots 8),$$

les quantités M_x étant définies par la formule

$$M_x = \sqrt[37]{\overset{(9)}{\varepsilon}{}_{9-x}^{\frac{37}{f_8}}} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, 8).$$

Il viendra

$$a_x = M_0 m_{9-x} + M_1 m_{10-x} + \cdots + M_8 m_{17-x} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, 8).$$

Les quantités m ne dépendent que des périodes, elles sont données par la

*) t. 40, p. 128.

formule

$$m_x = \frac{\gamma'_{9-x} - 4}{37}.$$

Le coefficient a_0 est compris entre 1,3 et 1,6; l'unité $\varepsilon_0^{(9)\,37/4}$ n'est donc pas une 37[ième] puissance et le second facteur du nombre des classes n'est pas divisible par 37 *).

On voit, d'après ce qui précède, qu'une unité ε congrue à un nombre entier suivant 37 peut n'être pas une puissance 37[ième]. Soit $\varepsilon(\theta)$ une unité du domaine $[\theta+\theta^{-1}]$. Posons

$$\frac{\varepsilon(\theta)}{\varepsilon(\theta^{g^9})} = E(\theta); \quad \frac{E(\theta)}{E(\theta^{g^6})} = \varepsilon'_{18}(\theta);$$

$$\varepsilon(\theta)\varepsilon(\theta^{g^9}) = e(\theta); \quad \frac{E(\theta)}{E(\theta^{g^{12}})} = \varepsilon''_{18}(\theta)$$

et

$$E(\theta)E(\theta^{g^6})E(\theta^{g^{12}}) = \mathrm{e}(\theta).$$

Il viendra

$$\varepsilon^6 = \varepsilon'_{18}\varepsilon''_{18}e^3\mathrm{e} = \varepsilon_{18}e^3\mathrm{e}, \quad \text{en posant} \quad \varepsilon_{18} = \varepsilon'_{18}\varepsilon''_{18}.$$

Dans cette expression ε_{18} est une unité appartenant au diviseur 18; en appliquant le même procédé aux unités e, e, on arrive à la formule

$$\varepsilon^{36} = \varepsilon_{18}^6\varepsilon_9^6\varepsilon_6^2\varepsilon_3^2\varepsilon_2,$$

$\varepsilon_{18}, \varepsilon_9, \ldots, \varepsilon_2$ étant des unités appartenant respectivement au diviseurs 18, 9, ..., 2 du nombre 18.

Ainsi la puissance 36[ième] de toute unité complexe du domaine $[\theta+\theta^{-1}]$ est égale au produit de certaines unités appartenant aux différents diviseurs du nombre 18.

Si $\varepsilon(\theta)$ est congrue à un nombre entier suivant 37, on a

$$\varepsilon^{36} \equiv 1 \pmod{37}.$$

Chacune des unités $\varepsilon_{18}, \varepsilon_9, \ldots, \varepsilon_2$ est congrue à 1 suivant 37, il viendra donc

$$\varepsilon.\varepsilon_9^2 = \text{puiss. } 37^{\text{ième}}$$

et

$$\frac{\varepsilon(\theta)}{\varepsilon(\theta^{g^9})} = \text{puiss. } 37^{\text{ième}}.$$

*) Comp. *Kummer,* Abhandl. der Berl. Akad., année 1857, p. 73.

Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit*).

(Von Herrn *Fritz Kötter*.)

§ 7.

Ueber die Beschaffenheit der Nullstellen von Z und die Werthe der Grössen z_1 und z_2.

Die Beschaffenheit der Nullstellen von Z hängt in erster Linie von dem Charakter der Nullstellen von $f(s)$ ab. Falls die letzteren sämmtlich von einander verschieden sind, können wir offenbar drei Fälle unterscheiden:

I. Zwei Paare conjugirt imaginärer Wurzeln.

II. Ein Paar conjugirt imaginärer Wurzeln und zwei reelle Wurzeln.

III. Vier reelle Wurzeln.

Im ersten Falle bezeichnen wir durch s_1 und s_2 zwei conjugirte Nullstellen, und zwar soll s_1 diejenige mit positiv imaginärem Bestandtheil sein. Ist nun

$$\frac{\sqrt{s_1-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} = A_a+B_a i, \quad \frac{\sqrt{(s_1-c_1)(s_1-c_2)(s_1-c_3)}}{s_1-c_a}\frac{\sqrt{s_1-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} = C_a+D_a i,$$

so muss offenbar

$$\frac{\sqrt{s_2-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_2)}} = \pm(A_a-B_a i), \quad \frac{\sqrt{(s_2-c_1)(s_2-c_2)(s_2-c_3)}}{s_2-c_a}\frac{\sqrt{s_2-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_2)}} = \pm(C_a-D_a i)$$

sein, wo gleichzeitig die oberen und die unteren Zeichen gelten. Die Coefficienten von x_a, y_a in ξ_a und η_a werden also gleichzeitig von der Form

$$\mathfrak{R}(1\pm i) \quad \text{resp.} \quad \mathfrak{R}_1(1\mp i).$$

Der Quotient $\xi_a:\eta_a$ wird rein imaginär, ebenso die Quadrate ξ_a^2, η_a^2. Wenn wir die auf s_2 bezüglichen Wurzeln passend wählen, können wir bewirken, dass alle ξ^2 unter einander und ebenso alle η^2 dasselbe Zeichen haben.

Bei der Bildung von d_a^2 setzen wir für s_3 die zweite Wurzel mit positiv imaginärem Bestandtheil. Die vier in d_a^2 auftretenden Wurzeln waren so zu wählen, dass

*) Fortzetzung von S. 81.

$$\prod_{\beta=1,2,3,4} \frac{\sqrt{s_\beta - c_a}}{\sqrt{\psi'(s_\beta)}} = -\frac{g(c_a)}{k_0} \frac{1}{(s_1-s_2)(s_3-s_4)(s_3-s_1)(s_3-s_2)(s_4-s_1)(s_4-s_2)}$$

wird. Da k_0 positiv ist, so hat die rechte Seite stets dasselbe Zeichen wie $g(c_a)$. Ist also $g(c_a)$ positiv, so muss, falls $\frac{\sqrt{s_2-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}$ conjugirt zu $\frac{\sqrt{s_1-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_1)}}$ ist, auch $\frac{\sqrt{s_4-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}$ conjugirt zu $\frac{\sqrt{s_3-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_3)}}$ sein, und wenn $-\frac{\sqrt{s_2-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}$ conjugirt zu $\frac{\sqrt{s_1-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_1)}}$ ist, auch $-\frac{\sqrt{s_4-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}$ zu $\frac{\sqrt{s_3-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_3)}}$ conjugirt. Bei positivem $g(c_a)$ ist also jedenfalls

$$d_a = \frac{\frac{\sqrt{s_3-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_3)}} + i\frac{\sqrt{s_4-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}}{\frac{\sqrt{s_1-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} + i\frac{\sqrt{s_2-c_a}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}}$$

reell und d_a^2 positiv. Hingegen ist bei negativem $g(c_a)$ die Grösse d_a rein imaginär, also d_a^2 negativ. Wenn sämmtliche Nullstellen s_β imaginär sein sollen, so müssen entweder sämmtliche $g(c_a)$ positiv sein, oder es ist $g(c_a)$ nur für das grösste c positiv, für die beiden anderen negativ.

Im ersten Falle liegen also die Grössen d_a^2 folgendermassen:

$$0 < d_3^2 < d_2^2 < d_1^2.$$

Wir können, indem wir nöthigenfalls die Grössen η und ξ vertauschen, wodurch die d_a^2 reciproke Werthe annehmen, bewirken, dass

$$d_1^2 d_3^2 < 1, \quad \text{also} \quad d_1^2 d_2^2 d_3^2 < d_2^2 \quad \text{ist.}$$

Da nun die Grössen η^2 sämmtlich rein imaginär sind und dasselbe Zeichen haben, so müssen die Grössen z_1 und z_2 reell sein und folgendermassen liegen:

$$d_3^2 < z_1 < d_2^2 < z_2 < d_1^2.$$

Damit nun $\xi_a : \eta_a$ rein imaginär werde, müssen, da $\sqrt{z_1 z_2}$ reell ist, offenbar die ursprünglich benutzten Z_1, Z_2 rein imaginär sein, und das ist nur möglich, falls $d_1^2 d_2^2 d_3^2$ zwischen z_1 und z_2 liegt. In dem vorliegenden Falle haben wir also

$$0 < d_3^2 < z_1 < d_1^2 d_2^2 d_3^2 < d_2^2 < z_2 < d_1^2.$$

Damit Z reell werde, setzen wir für die weitere Rechnung

$$Z = \sqrt{-z(z-d_3^2)\left(\frac{z-d_1^2 d_2^2 d_3^2}{d_1^2 d_2^2 d_3^2}\right)(z-d_2^2)(z-d_1^2)}.$$

In dem anderen Falle ergiebt sich folgende Anordnung der Grössen d_a^2:

$$d_1^2 < d_2^2 < 0 < d_3^2,$$

und, indem man nöthigenfalls die Grössen ξ und η vertauscht:

$$d_1^2 < d_2^2 < 0 < d_1^2 d_2^2 d_3^2 < d_3^2.$$

Die Lage der Grössen z_1 und z_2 ist durch die Ungleichheiten

$$d_1^2 < z_2 < d_2^2 < z_1 < d_3^2$$

bestimmt. Damit nun die Quotienten $\xi_a : \eta_a$ sämmtlich rein imaginär seien, müssen die Werthe

$$\sqrt{z_1 z_2} Z_1 \quad \text{und} \quad \sqrt{z_1 z_2} Z_2$$

beide rein imaginär sein, und das erfordert, dass zwischen z_2 und z_1 eine gerade Anzahl von Nullstellen liegt. Demnach liegen z_1 und z_2 folgendermassen

$$d_1^2 < z_2 < d_2^2 < 0 < z_1 < d_1^2 d_2^2 d_3^2 < d_3^2.$$

Hier behalten wir das ursprünglich eingeführte Z bei, da es reell ist.

Aus den Gleichungen (33.) und (34.) erkennt man übrigens leicht, dass in beiden Fällen dem Index 1 die mittlere Grösse c entspricht.

Sind zwei Wurzeln imaginär und zwei reell, so wählen wir s_1 und s_2 aus den imaginären Wurzeln und zwar so, dass s_1 einen positiv imaginären Bestandtheil erhält. Dann gilt in Bezug auf die ξ und η dasselbe wie bei dem vorher behandelten Fall. Wir setzen fest, dass die Wurzeln so gewählt werden sollen, dass alle η die Form $\mathfrak{R}(1-i)$ haben. Bestimmen wir jetzt, dass s_3 die grössere der beiden reellen Nullstellen sein soll, so wird für die beiden grösseren c, da s_3 und s_4 zwischen dem kleinsten und dem mittleren Werthe von c liegen, die Grösse d_a die Form $\pm\mathfrak{R}(1+i)$, hingegen für das kleinste c die Form $\pm\mathfrak{R}(1-i)$ haben. Die Grössen d_a^2 sind rein imaginär. Setzen wir demnach $d_a^2 = i\delta_a$ und $d_1^2 d_2^2 d_3^2 = i\delta_4$, so ist offenbar

$$\delta_3 < 0 < \delta_2 < \delta_1 \quad \text{und} \quad 0 < \delta_4.$$

Je nachdem die δ_a in derselben Reihenfolge stehen als die c_a oder nicht, wird δ_4 grösser sein als δ_1 oder kleiner als δ_2; wir haben also die folgenden Anordnungen:

$$\delta_3 < 0 < \delta_2 < \delta_1 < \delta_4$$

oder

$$\delta_3 < 0 < \delta_4 < \delta_2 < \delta_1.$$

Im ersteren Falle können wir noch die ξ und die η mit einander ver-

tauschen; dann gehen die d_a^2 in die reciproken Werthe über, und es wird also

$$\delta_1 < \delta_2 < \delta_4 < 0 < \delta_3.$$

Die ursprünglich eingeführten z bezeichnen wir in diesen Fällen durch iz_1 und iz_2. Die z liegen dann offenbar in folgender Weise

$$\delta_3 < 0 < z_1 < \delta_4 < \delta_2 < z_2 < \delta_1,$$
$$\delta_1 < z_2 < \delta_2 < \delta_4 < z_1 < 0 < \delta_3.$$

In beiden Fällen werden die ursprünglichen Z imaginär, so dass man an Stelle derselben die Function

$$Z = \sqrt{-z(z-\delta_1)(z-\delta_2)(z-\delta_3)\left(\frac{z}{\delta_4}-1\right)}$$

einführt.

Um endlich den Fall von vier reellen Wurzeln zu erledigen, verfahren wir folgendermassen; für s_1 und s_3 nehmen wir die grösste und drittgrösste Nullstelle in vorläufig willkürlich gelassener Anordnung, für s_2 und s_4 nehmen wir je eine der beiden anderen Nullstellen. Ferner verfügen wir über die $\sqrt{\psi'(s_a)}$ derart, dass stets

$$\sqrt{\psi'(s_1)}\sqrt{\psi'(s_2)}\sqrt{\psi'(s_3)}\sqrt{\psi'(s_4)} = (s_1-s_2)(s_1-s_3)(s_1-s_4)(s_2-s_3)(s_2-s_4)(s_3-s_4)$$

wird, und dass folglich ebenso stets

$$\sqrt{s_1-c_a}\sqrt{s_2-c_a}\sqrt{s_3-c_a}\sqrt{s_4-c_a} = -g(c_a),$$

oder wenn wir, falls c_a grösser als die Grössen s ist,

$$\sqrt{s_\beta-c_a} = i\sqrt{c_a-s_\beta}$$

setzen,

$$\prod_{\beta=1,2,3,4}\sqrt{c_a-s_\beta} = -g(c_a);$$

das Product hat demnach einen von der Anordnung der Grössen s_β unabhängigen Werth.

Für die beiden grösseren c wird offenbar das zugehörige ξ sowohl als das η rein imaginär; für das kleinste c hingegen reell. Wählen wir ferner die Bezeichnung der ξ und η richtig, so können wir es offenbar erreichen, dass die Grössen d_a^2, welche in diesem Falle positiv reell sind, auch grösser als 1 werden. Dann lässt sich durch passende Auswahl der Stellen s_β stets erreichen, dass die Grössen d_a^2 in denselben Reihenfolgen stehen wie die Grössen c_a. Da $d_1^2 d_2^2 d_3^2$ grösser ist als das grösste d_a^2 selbst, so entspricht dem mittleren c auch das mittlere d_a^2. Wir haben

also nur zu zeigen, dass bei passender Wahl der Grössen s auch dem grössten c ein grösseres d_a^2 entspricht als dem mittleren.

Wir bilden zunächst

$$d_a - \frac{1}{d_a} = \frac{\frac{\sqrt{c_a-s_3}}{\sqrt{\psi'(s_3)}} + i\frac{\sqrt{c_a-s_4}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}}{\frac{\sqrt{c_a-s_1}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} + i\frac{\sqrt{c_a-s_2}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}} + \frac{\frac{\sqrt{c_a-s_3}}{\sqrt{\psi'(s_3)}} - i\frac{\sqrt{c_a-s_4}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}}{\frac{\sqrt{c_a-s_1}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} - i\frac{\sqrt{c_a-s_2}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}}$$

$$= 2\,\frac{\frac{\sqrt{c_a-s_1}}{\sqrt{\psi'(s_1)}}\,\frac{\sqrt{c_a-s_3}}{\sqrt{\psi'(s_3)}} + \frac{\sqrt{c_a-s_2}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}\,\frac{\sqrt{c_a-s_4}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}}{\frac{c_a-s_1}{\psi'(s_1)} + \frac{c_a-s_2}{\psi'(s_2)}}$$

$$= -2\sqrt{\frac{(s_1-s_4)(s_2-s_3)}{(s_1-s_2)(s_3-s_4)}}\;\frac{(s_2-s_4)\sqrt{c_a-s_1}\sqrt{c_a-s_3}+(s_1-s_3)\sqrt{c_a-s_2}\sqrt{c_a-s_4}}{c_a-(s_1+s_2-s_3-s_4)-(s_1 s_2-s_3 s_4)}$$

$$= -2\sqrt{\frac{(s_1-s_4)(s_2-s_3)}{(s_1-s_2)(s_3-s_4)}}\;\frac{\sqrt{c_a-s_1}\sqrt{c_a-s_4}+\sqrt{c_a-s_2}\sqrt{c_a-s_3}}{\sqrt{c_a-s_1}\sqrt{c_a-s_2}+\sqrt{c_a-s_3}\sqrt{c_a-s_4}}.$$

Daraus folgt, dass der Ausdruck

$$U = \left(d_a - \frac{1}{d_a}\right)^2 = d_a^2 + \frac{1}{d_a^2} - 2$$

den reciproken Werth annimmt, sobald wir die beiden Stellen s_2 und s_4 mit einander vertauschen. Durch passende Auswahl unter den Nullstellen kann es also stets erreicht werden, dass für das grösste c der Ausdruck $d_a^2 + d_a^{-2}$ grösser wird als für das mittlere. Womit dann bewiesen ist, dass thatsächlich die Grössen d_a^2 in dieselbe Reihenfolge gebracht werden können wie die Grössen c_a. Hier gilt demnach folgende Anordnung:

$$0 < 1 < d_1^2 < d_2^2 < d_3^2 < d_1^2 d_2^2 d_3^2.$$

Man erkennt leicht, dass, da η_2^2 und η_3^2 das gleiche Zeichen haben müssen, eine der Grössen z zwischen d_2^2 und d_3^2 liegt. Weil alle Quotienten $\xi:\eta$ reell sind, so ist offenbar $\sqrt{z_1 z_2} Z_1$ und $\sqrt{z_1 z_2} Z_2$ reell, und in Folge dessen muss zwischen den beiden Grössen z_1 und z_2 eine gerade Anzahl von Nullstellen liegen; sodass wir die beiden Fälle

$$0 < z_2 < d_1^2 < d_2^2 < z_1 < d_3^2 < d_1^2 d_2^2 d_3^2$$

und

$$0 < d_1^2 < d_2^2 < z_1 < d_3^2 < d_1^2 d_2^2 d_3^2 < z_2$$

zu unterscheiden hätten. In dem zweiten Falle wollen wir jedoch gleichzeitig s_1 mit s_3 und s_2 mit s_4 vertauschen. Dadurch geht offenbar

$$\frac{\eta}{d_a} \text{ in } \eta_a \quad \text{und} \quad \eta_a \text{ in } \frac{\eta_a}{d_a}$$

über, und die d_a verwandeln sich in ihre reciproken Werthe. Dann erhalten wir

$$0 < d_1^2 d_2^2 d_3^2 < d_3^2 < d_2^2 < d_1^2 < 1.$$

Eine Grösse z muss sicher zwischen d_3^2 und d_2^2 liegen; die zweite Wurzel liegt dann unter der gemachten Voraussetzung, wie man sich leicht überzeugt, zwischen Null und $d_1^2 d_2^2 d_3^2$. Wir haben also bei vier reellen Nullstellen von $f(s)$ folgende Fälle zu unterscheiden:

$$0 < z_2 < d_1^2 < d_2^2 < z_1 < d_3^2 < d_1^2 d_2^2 d_3^2,$$
$$0 < z_2 < d_1^2 d_2^2 d_3^2 < d_3^2 < z_1 < d_2^2 < d_1^2.$$

Hier sind die ursprünglich eingeführten Z reell. Setzen wir nun allgemein die fünf Nullstellen der Grösse Z gleich e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, sodass

$$Z^2 = A_0(z-e_0)(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)(z-e_4)$$

wird, und bestimmen, dass, je nachdem A_0 negativ oder positiv ist, $e_0 < e_1 < e_2 < e_3 < e_4$ oder $e_0 > e_1 > e_2 > e_3 > e_4$ sein soll, so liegt allgemein z_2 zwischen e_3 und e_4 und z_1 zwischen e_1 und e_2. Ferner sind in allen aufgeführten Fällen die Grössen

$$v_1 = \int_{e_1}^{z_1} \frac{dz}{Z} + \int_{e_3}^{z_2} \frac{dz}{Z},$$
$$v_2 = \int_{e_1}^{z_1} \frac{z\,dz}{Z} + \int_{e_3}^{z_2} \frac{z\,dz}{Z}$$

reell, ebenso wie die Halbperioden

$$K_{11} = \int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{Z}, \quad K_{12} = \int_{e_3}^{e_4} \frac{dz}{Z},$$
$$K_{21} = \int_{e_1}^{e_2} \frac{z\,dz}{Z}, \quad K_{22} = \int_{e_3}^{e_4} \frac{z\,dz}{Z}.$$

Dasselbe gilt auch für die Grössen u_1, u_2, welche wir definiren durch die Gleichungen

$$v_1 = 2K_{11}u_1 + 2K_{12}u_2,$$
$$v_2 = 2K_{21}u_1 + 2K_{22}u_2.$$

Es sind aber die Grössen u_β lineare Functionen der ursprünglich eingeführten Grössen w_a und also lineare Functionen der Zeit, deren Coefficienten dann natürlich reell sind. Wir setzen

$$u_\beta = g_\beta t + h_\beta \qquad (\beta = 1, 2).$$

Dann sind die Grössen g mit den Grössen $i\bar{\varepsilon}f$ verbunden durch die Gleichungen:

$$g_\beta = i\bar{\varepsilon}\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial w_1} f_1 + \frac{\partial u_\beta}{\partial w_2} f_2\right)$$

und umgekehrt die f mit den g durch die Gleichungen

$$f_\gamma = -i\bar{\varepsilon}\left(\frac{\partial w_\gamma}{\partial u_1} g_1 + \frac{\partial w_\gamma}{\partial u_2} g_2\right).$$

Ferner setzen wir

$$g'_\beta = i\bar{\varepsilon}\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial w_1} f'_1 + \frac{\partial u_\beta}{\partial w_2} f'_2\right),$$

woraus man erhält:

$$f'_\gamma = -i\bar{\varepsilon}\left(\frac{\partial w_\gamma}{\partial u_1} g'_1 + \frac{\partial w_\gamma}{\partial u_2} g'_2\right).$$

Die Grössen, welche aus u_1 und u_2 entstehen, indem wir s_1, s_2 mit s'_1, s'_2 vertauschen, nennen wir u'_1 und u'_2.

Wir wollen ferner festsetzen, dass die Nullstellen von Z, welche den Werthen d_1^2, d_2^2, d_3^2, $d_1^2 d_2^2 d_3^2$ entsprechen, ein für alle Mal bezeichnet werden sollen durch e_α, e_β, e_γ, e_δ, e_ε, so dass in den sechs unterschiedenen Fällen ist

			α	β	γ	δ	ε
1)	$A_0 = -\frac{1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2}$	(negativ)	4	3	1	2	0,
2)	$A_0 = \frac{1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2}$	(positiv)	4	3	0	1	2,
3)	$A_0 = -\frac{i}{d_1^2 d_2^2 d_3^2}$	(negativ)	4	3	0	2	1,
4)	$A_0 = -\frac{i}{d_1^2 d_2^2 d_3^2}$	(positiv)	4	3	0	2	1,
5)	$A_0 = \frac{1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2}$	(positiv)	3	2	1	0	4,
6)	$A_0 = \frac{1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2}$	(positiv)	0	1	2	3	4.

§ 8.

Einführung der Thetafunctionen.

Nach den im vorhergehenden Paragraphen getroffenen Festsetzungen ist es leicht, die gesuchten Grössen durch ϑ-Functionen darzustellen.

Zwei simultane Periodensysteme der von uns u_1 und u_2 genannten

Integrale sind

$$\begin{matrix} u_1 & 1 & 0 \\ u_2 & 0 & 1. \end{matrix}$$

Die beiden anderen simultanen Periodensysteme mögen sein

$$\begin{matrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22}. \end{matrix}$$

Bezüglich der ϑ-Functionen schliessen wir uns der Bezeichnungsweise des Herrn *Weierstrass* an. Wir definiren genau, wie es Frau *von Kowalevski* in ihrer Abhandlung über die Rotation *) im Anschluss an die Untersuchungen des Herrn *Königsberger* **) gethan hat, die Function $\vartheta(u_1, u_2)$ durch die Gleichung:

$$\vartheta(u_1, u_2) = \sum_{n_1, n_2} e^{\{n_1(2u_1+n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12})+n_2(2u_2+n_1\tau_{21}+n_2\tau_{22})\}\pi i}.$$

Ferner definiren wir weitere Functionen durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\vartheta(u_1, u_2|\nu_1, \nu_2) &= \vartheta(u_1+\nu_1\tau_{11}+\nu_2\tau_{12}, u_2+\nu_1\tau_{21}+\nu_2\tau_{22})e^{\Sigma_a \nu_a(2u_a+\nu_1\tau_{a1}+\nu_2\tau_{a2})\pi i}, \\
\vartheta(u_1, u_2)_0 &= \vartheta(u_1-\tfrac{1}{2}, u_2-\tfrac{1}{2}|0, 0), \\
\vartheta(u_1, u_2)_1 &= \vartheta(u_1-\tfrac{1}{2}, u_2-\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2}, 0), \\
\vartheta(u_1, u_2)_2 &= \vartheta(u_1, u_2-\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2}, 0), \\
\vartheta(u_1, u_2)_3 &= \vartheta(u_1, u_2-\tfrac{1}{2}|0, \tfrac{1}{2}), \\
\vartheta(u_1, u_2)_4 &= \vartheta(u_1, u_2|0, \tfrac{1}{2}), \\
\vartheta(u_1, u_2)_\lambda &= \vartheta(u_1+\tfrac{1}{2}m_1^\lambda, u_2+\tfrac{1}{2}m_2^\lambda|\tfrac{1}{2}n_1^\lambda, \tfrac{1}{2}n_2^\lambda) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3, 4), \\
\vartheta(u_1, u_2)_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_a} &= \vartheta(u_1+\tfrac{1}{2}m_1^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_a}, u_2+\tfrac{1}{2}m_2^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_a}|\tfrac{1}{2}n_1^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_a}, \tfrac{1}{2}n_2^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_a}) \\
-1 \leqq m_\beta^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_a} &\leqq 0, \quad m_\beta^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_a} \equiv m_\beta^{\lambda_1}+m_\beta^{\lambda_2}\ldots m_\beta^{\lambda_a} \quad (\text{modulo } 2), \\
1 \geqq n_\beta^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_a} &\geqq 0, \quad n_\beta^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_a} \equiv n_\beta^{\lambda_1}+n_\beta^{\lambda_2}\ldots n_\beta^{\lambda_a} \quad (\text{modulo } 2).
\end{aligned}$$

Die Thetafunctionen sind gerade oder ungerade, je nachdem $n_1m_1+n_2m_2$ modulo 2 congruent 0 oder 1 ist. Es sind also ϑ selbst und die Functionen mit einfachem geraden Index gerade, während die mit ungeradem Index ungerade sind. Von den 10 Thetafunctionen, deren Index aus zwei einfachen Indices zusammengesetzt ist, sind diejenigen ungerade, bei welchen die beiden einfachen Indices gleichzeitig gerade oder ungerade sind, hingegen gerade, wenn die beiden Thetafunctionen verschiedenartig sind. Da

$$m_\beta^{01234} = 0, \quad n_\beta^{01234} = 0$$

ist, so ist jede Thetafunction, deren Index sich aus mehr als zwei Indices zusammensetzt, mit einer der 16 vorerwähnten identisch.

---

*) Acta Mathematica Bd. 12.

**) Dieses Journal Bd. 64.

Zwischen den Thetafunctionen und den oberen Integralgrenzen bestehen gewisse einfache Relationen. Setzen wir zur Abkürzung

$$R(z) = +A_0(z-e_0)(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)(z-e_4),$$

so gelten folgende Gleichungen

$$\frac{\vartheta(u_1, u_2)_{2\lambda}}{\vartheta(u_1, u_2)} = \frac{\sqrt{(-1)^\lambda(z_1-e_{2\lambda})(z_2-e_{2\lambda})}}{\sqrt[4]{R'(e_{2\lambda})}},$$

$$\frac{\vartheta(u_1,u_2)_{2\lambda-1}}{\vartheta(u_1, u_2)} = \frac{\sqrt{(-1)^{\lambda-1}(z_1-e_{2\lambda-1})(z_2-e_{2\lambda-1})}}{\sqrt[4]{R'(e_{2\lambda-1})}},$$

$$\frac{\vartheta(u_1, u_2)_{\lambda,\mu}\vartheta(u_1, u_2)}{\vartheta(u_1, u_2)_\lambda\vartheta(u_1, u_2)_\mu}$$

$$= \sqrt{\frac{\pm(e_\lambda-e_\mu)}{A_0}}\left\{\frac{\sqrt{R(z_1)}}{(z_1-e_\lambda)(z_1-e_\mu)(z_1-z_2)} + \frac{\sqrt{R(z_2)}}{(z_2-e_\lambda)(z_2-e_\mu)(z_2-z_1)}\right\}.$$

Bezeichnen wir nun mit $\varkappa$ eine der Zahlen 1, 2, 3, 4 und mit λ die entsprechende der Grössen α, β, γ, δ, so werden die von uns $P_\varkappa$ genannten Grössen durch die Formel

$$P_\varkappa = \frac{i^{|\lambda|}\sqrt[4]{R(e_\varepsilon)}}{\vartheta(u_1, u_2)\vartheta(u_1', u_2')}\{\vartheta(u_1', u_2')_\lambda\vartheta(u_1, u_2)_{\lambda\varepsilon} \mp \vartheta(u_1', u_2')_{\lambda\varepsilon}\vartheta(u_1, u_2)_\lambda\}$$

geliefert, in welcher $|\lambda|$ eine gewisse ganze Zahl bedeutet. Durch passende Bestimmung der Grössen u_1', u_2' können wir es stets erreichen, dass das Zeichen in der Klammer, welches bei allen Ausdrücken denselben Werth hat, ein Minuszeichen wird. Ist ε ein gerader Index, so ist von den Functionen $\vartheta(u_1', u_2')_\lambda$ und $\vartheta(u_1', u_2')_{\lambda\varepsilon}$ sicher die eine gerade, die andere ungerade; wir haben also nöthigenfalls nur u_1', u_2' mit $-u_1'$, $-u_2'$ zu vertauschen, um das gewünschte Ziel zu erreichen. Es ist dies erlaubt, da wir die Bedeutung der Grössen Z_1', Z_2' gleichzeitig ändern können, ohne dass $P_\varkappa$ sich ändert, falls wir nur gleichzeitig auch die Bedeutung der Wurzel $\sqrt{z_1'z_2'}$ ändern. Ist jedoch ε ein ungerader Index, so vermehren wir, falls nicht von vornherein in der Klammer das Minuszeichen steht, die Argumente u_1', u_2' um eine simultane Periode

$$\omega_1 = m_1+n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12},$$

$$\omega_2 = m_2+n_1\tau_{21}+n_2\tau_{22}.$$

Dann erhält man

$$\vartheta(u_1'+\omega_1, u_2'+\omega_2)_\lambda = e^{-\Sigma n_a(2u_a+n_1\tau_{a1}+n_2\tau_{a2})\pi i+\Sigma(m_a n_a^\lambda-n_a m_a^\lambda)\pi i}\vartheta(u_1', u_2')_\lambda,$$

$$\vartheta(u_1'+\omega_1, u_2'+\omega_2)_{\lambda\varepsilon} = e^{-\Sigma n_a(2u_a+n_1\tau_{a1}+n_2\tau_{a2})\pi i+\Sigma(m_a n_a^{\lambda\varepsilon}-n_a m_a^{\lambda\varepsilon})\pi i}\vartheta(u_1', u_2')_{\lambda\varepsilon},$$

und demnach

$$\frac{\vartheta(u'_1+\omega_1, u'_2+\omega_2)_{\lambda\varepsilon}}{\vartheta(u'_1+\omega_1, u'_2+\omega_2)_\lambda} = e^{\Sigma(m_a n_a^\varepsilon - n_a m_a^\varepsilon)\pi i}\frac{\vartheta(u'_1, u'_2)_{\lambda\varepsilon}}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\lambda}.$$

Man erreicht den gewünschten Effect offenbar dann, wenn

$$\Sigma(m_a n_a^\varepsilon - n_a m_a^\varepsilon) \equiv 1 \quad (\text{modulo } 2)$$

ist. Es ist, wenn δ einen von ε verschiedenen einfachen Index bedeutet:

$$\Sigma(m_a^\delta n_a^\varepsilon - n_a^\delta m_a^\varepsilon) \equiv \Sigma(m_a^\delta n_a^\varepsilon + n_a^\delta m_a^\varepsilon) \equiv \Sigma(m_a^\delta n_a^{\delta\varepsilon} + n_a^{\delta\varepsilon} m_a^\varepsilon + m_a^\delta n_a^\delta + m_a^\varepsilon n_a^\varepsilon)$$

$$\equiv \Sigma(n_a^{\delta\varepsilon} m_a^{\delta\varepsilon} + m_a^\delta n_a^\delta + m_a^\varepsilon n_a^\varepsilon).$$

Wenn nun ε einen ungeraden Index bezeichnet, so sind die Indices $\delta\varepsilon$ und δ gleichzeitig gerade oder ungerade, und folglich der vorstehende Ausdruck $\equiv 1$ modulo 2. Bezeichnen wir nun $i^{|\lambda|-|\delta|+1}$ mit i_λ, so kann der Ausdruck

$$A_x = i\frac{P_x}{P_4} = i_\lambda \frac{\vartheta(u'_1, u'_2)_\lambda \vartheta(u_1, u_2)_{\lambda\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\lambda\varepsilon}\vartheta(u_1, u_2)_\lambda}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1, u_2)_\delta}$$

gesetzt werden. Bis auf das Vorzeichen lassen sich die Coefficienten i_λ auf folgende Weise bestimmen. Es ist allgemein

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 1.$$

Setzen wir nun für u_1, u_2 das zum Index $13\beta\gamma$ und für u'_1, u'_2 das zum Index 13 gehörende System halber Perioden, so werden die Zähler von A_2 und A_3 gleich Null, weil jeder Index von der Form 13μ ($\mu = 0, 1, 2, 3, 4$) ungerade ist. Hingegen erhalten der Zähler von A_1 und der gemeinschaftliche Nenner aller Brüche einen von Null verschiedenen Werth, weil die Indices von der Form $13\lambda\mu$ sämmtlich gerade sind. Es reducirt sich A_1^2 auf

$$i_a^2(-1)^{\sum_x m_x^{a\delta\varepsilon} m_x^{a\delta}} = 1,$$

also wird

$$i_a = \pm e^{\frac{\pi i}{2}\{n_1^{a\delta\varepsilon} m_1^{a\delta} + n_2^{a\delta\varepsilon} m_2^{a\delta}\}}.$$

Man übersieht leicht, dass man durch geeignete Wahl des in dem Körper festen Coordinatensystems stets ein willkürlich vorgeschriebenes Zeichen der Grössen i_a erhalten kann. Betrachten wir die Ausdrücke

$$x_a\frac{\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}}{\sqrt{s-c_a}\sqrt{f(s)}} + y_a\frac{\sqrt{s-c_a}}{\sqrt{f(s)}} \qquad (a = 1, 2, 3),$$

welche ja gleich den Grössen A_a waren, so erkennen wir, dass wir das Zeichen eines dieser Ausdrücke ändern können, indem wir die Richtung

der betreffenden Coordinatenaxe entgegengesetzt annehmen und gleichzeitig die Zeichen der Ausdrücke

$$\sqrt{s-c_1},\quad \sqrt{s-c_2},\quad \sqrt{s-c_3},\quad \sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)},$$

welche einander gleich sein sollten, in die entgegengesetzten verwandeln.

Dabei haben sich ein x und die beiden zu den anderen Axen gehörenden y geändert; es haben also auch

$$\Sigma x_a y_a$$

und damit die zu den Nullstellen gehörenden Ausdrücke

$$\sqrt{(s_\beta-c_1)(s_\beta-c_2)(s_\beta-c_3)}$$

ihr Vorzeichen geändert. Demnach hat von den Grössenpaaren ξ_a, η_a nur eines, die Grössenpaare ξ'_a, η'_a dagegen sämmtlich das Zeichen geändert. Die durch die vorgenommene Transformation bewirkte Aenderung der Grössen A_a kann also nur in einer Zeichenänderung einer derselben bestehen, nämlich derjenigen, welche zur umgekehrten Axe gehört.

Will man die Zeichen zweier der Grössen A_a ändern, so hat man nur die Richtungen der beiden zugehörigen Axen in die entgegengesetzten zu verwandeln. Um die Zeichen aller drei Grössen zu verwandeln, hat man alle drei Axen nach entgegengesetzter Richtung zu nehmen und gleichzeitig die Vorzeichen sämmtlicher Wurzeln $\sqrt{s-c_a}$ und $\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}$ zu ändern. $f(s)$ ändert dabei seinen Werth nicht, da allemal, wenn $\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}$ sein Zeichen ändern sollte auch $k_3 = \Sigma x_a y_a$ in Folge der Aenderung des Coordinatensystems sein Zeichen ändert.

Wir wissen nun, dass die Grössen A_1, A_2, A_3 den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_1}{\partial u_\beta} &= -i\bar{\varepsilon}\Big(A_3\frac{\partial A_2}{\partial u'_\beta} - A_2\frac{\partial A_3}{\partial u'_\beta}\Big),\\ \frac{\partial A_2}{\partial u_\beta} &= -i\bar{\varepsilon}\Big(A_1\frac{\partial A_3}{\partial u'_\beta} - A_3\frac{\partial A_1}{\partial u'_\beta}\Big), \qquad (\beta = 1, 2),\\ \frac{\partial A_3}{\partial u_\beta} &= -i\bar{\varepsilon}\Big(A_2\frac{\partial A_1}{\partial u'_\beta} - A_1\frac{\partial A_2}{\partial u'_\beta}\Big)\end{aligned}$$

genügen. Bestimmen wir den Werth $\bar{\varepsilon}$, so dürfen wir über zwei der Grössen i_a, i_β, i_γ frei verfügen, die dritte ist dann aber bestimmt. Wir erhalten eine Gleichung für das Product $i_a i_\beta i_\gamma$, indem wir in die erste Gleichung für u_1, u_2, die zu 13α gehörenden halben Perioden und für u'_1, u'_2 die zu 13β gehörenden halben Perioden einsetzen. Dann werden A_1 und A_2 gleich

Null. A_3 verwandelt sich in eine Potenz von i und ebenso der Bruch $\frac{\partial A_1}{\partial u_\beta} : \frac{\partial A_2}{\partial u'_\beta}$. Wir setzen fest, dass die Vorzeichen von i_α, i_β, i_γ so gewählt sind, dass $\bar{\varepsilon} = +1$ wird.

Bezeichnen wir nun die Grössen

$$f_3 + i\left(\frac{\partial \ln \vartheta(u'_1, u'_2)}{\partial u'_1} g_1 + \frac{\partial \ln \vartheta(u'_1, u'_2)}{\partial u'_2} g_2\right)$$

und

$$f'_3 + i\left(\frac{\partial \ln \vartheta(u'_1, u'_2)}{\partial u'_1} g'_1 + \frac{\partial \ln \vartheta(u'_1, u'_2)}{\partial u'_2} g'_2\right)$$

durch g_3 und g'_3 und die Operationen

$$\left(g_3 - i\frac{\partial}{\partial u'_1} g_1 - i\frac{\partial}{\partial u'_2} g_2\right),$$

$$\left(g'_3 - i\frac{\partial}{\partial u'_1} g'_1 - i\frac{\partial}{\partial u'_2} g'_2\right)$$

durch $\varDelta$ und $\varDelta'$, so erhalten wir schliesslich für die Componenten des Impulses sowie für die Componenten der Geschwindigkeit folgendes System von Formeln:

$$\text{I.} \qquad x_1 = \frac{\partial T}{\partial u} = J i_\alpha \frac{\vartheta(u_1, u_2)_{\alpha\varepsilon}\vartheta(u'_1, u'_2)_\alpha - \vartheta(u_1, u_2)_\alpha \vartheta(u'_1, u'_2)_{\alpha\varepsilon}}{\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta - \vartheta(u_1, u_2)_\delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon}},$$

$$x_2 = \frac{\partial T}{\partial v} = J i_\beta \frac{\vartheta(u_1, u_2)_{\beta\varepsilon}\vartheta(u'_1, u'_2)_\beta - \vartheta(u_1, u_2)_\beta \vartheta(u'_1, u'_2)_{\beta\varepsilon}}{\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta - \vartheta(u_1, u_2)_\delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon}},$$

$$x_3 = \frac{\partial T}{\partial w} = J i_\gamma \frac{\vartheta(u_1, u_2)_{\gamma\varepsilon}\vartheta(u'_1, u'_2)_\gamma - \vartheta(u_1, u_2)_\gamma \vartheta(u'_1, u'_2)_{\gamma\varepsilon}}{\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta - \vartheta(u_1, u_2)_\delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon}}.$$

$$\text{II.} \qquad y_1 = \frac{\partial T}{\partial p} = i_\alpha \frac{\vartheta(u_1, u_2)_{\alpha\varepsilon}\varDelta'\vartheta(u'_1, u'_2)_\alpha - \vartheta(u_1, u_2)_\alpha \varDelta'\vartheta(u'_1, u'_2)_{\alpha\varepsilon}}{\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta - \vartheta(u_1, u_2)_\delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon}},$$

$$y_2 = \frac{\partial T}{\partial q} = i_\beta \frac{\vartheta(u_1, u_2)_{\beta\varepsilon}\varDelta'\vartheta(u'_1, u'_2)_\beta - \vartheta(u_1, u_2)_\beta \varDelta'\vartheta(u'_1, u'_2)_{\beta\varepsilon}}{\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta - \vartheta(u_1, u_2)_\delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon}},$$

$$y_3 = \frac{\partial T}{\partial r} = i_\gamma \frac{\vartheta(u_1, u_2)_{\gamma\varepsilon}\varDelta'\vartheta(u'_1, u'_2)_\gamma - \vartheta(u_1, u_2)_\gamma \varDelta'\vartheta(u'_1, u'_2)_{\gamma\varepsilon}}{\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta - \vartheta(u_1, u_2)_\delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon}}.$$

$$\text{III.} \qquad b_1 y_1 = p \quad = i_\alpha \frac{\vartheta(u_1, u_2)_{\alpha\varepsilon}\varDelta\vartheta(u'_1, u'_2)_\alpha - \vartheta(u_1, u_2)_\alpha \varDelta\vartheta(u_1, u_2)_{\alpha\varepsilon}}{\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta - \vartheta(u_1, u_2)_\delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon}},$$

$$b_2 y_2 = q \quad = i_\beta \frac{\vartheta(u_1, u_2)_{\beta\varepsilon}\varDelta\vartheta(u'_1, u'_2)_\beta - \vartheta(u_1, u_2)_\beta \varDelta\vartheta(u_1, u_2)_{\beta\varepsilon}}{\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta - \vartheta(u_1, u_2)_\delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon}},$$

$$b_3 y_3 = r \quad = i_\gamma \frac{\vartheta(u_1, u_2)_{\gamma\varepsilon}\varDelta\vartheta(u'_1, u'_2)_\gamma - \vartheta(u_1, u_2)_\gamma \varDelta\vartheta(u'_1, u'_2)_{\gamma\varepsilon}}{\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta - \vartheta(u_1, u_2)_\delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon}}.$$

$$\text{IV.}\quad \begin{aligned} a_1x_1 = u &= \frac{1}{J}\left\{g_4\frac{\partial T}{\partial u} - i\left(\frac{\partial p}{\partial u_1'}g_1' + \frac{\partial p}{\partial u_2'}g_2'\right)\right\},\\ a_2x_2 = v &= \frac{1}{J}\left\{g_4\frac{\partial T}{\partial v} - i\left(\frac{\partial q}{\partial u_1'}g_1' + \frac{\partial q}{\partial u_2'}g_2'\right)\right\},\\ a_3x_3 = w &= \frac{1}{J}\left\{g_4\frac{\partial T}{\partial w} - i\left(\frac{\partial r}{\partial u_1'}g_1' + \frac{\partial r}{\partial u_2'}g_2'\right)\right\}. \end{aligned}$$

§ 9.

Die Richtungscosinus und die nach den im Raume festen Axen genommenen Componenten der Rotationsgeschwindigkeit.

Nach den Integralgleichungen des Problems bestehen zwischen den Componenten des Impulses und den drei Richtungscosinus der Axe desselben zu den drei im Körper festen Axen die Gleichungen

$$x_\varkappa = J\alpha_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, 3).$$

Man erhält also, wenn λ diejenige der Zahlen α, β, γ bezeichnet, welche der Zahl $\varkappa$ entspricht, die Gleichung:

$$\alpha_\varkappa = i_\lambda \frac{\vartheta(u_1', u_2')_\lambda \vartheta(u_1, u_2)_{\lambda\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\lambda\varepsilon}\vartheta(u_1, u_2)_\lambda}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1, u_2)_\delta}.$$

Sind nun $\beta_\varkappa^0$, $\gamma_\varkappa^0$ $(\varkappa = 1, 2, 3)$ zwei Grössensysteme, welche den Bedingungen für zwei zu einander und zur Richtung α_1, α_2, α_3 senkrechte Richtungen genügen, so erhalten wir das allgemeinste derartige Grössensystem durch die Gleichungen

$$\beta_\varkappa \pm i\gamma_\varkappa = (\beta_\varkappa^0 \pm i\gamma_\varkappa^0)S^{\pm 1},$$

wo gleichzeitig überall das Zeichen + oder − zu nehmen ist.

Wie man nun aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial u_\beta} = -\varepsilon_{\varkappa\lambda\mu} i\left(\alpha_\mu \frac{\partial \alpha_\lambda}{\partial u_\beta'} - \alpha_\lambda \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial u_\beta'}\right)$$

unmittelbar erkennt, erhält man ein specielles derartiges Grössensystem durch die Gleichungen:

$$\beta_\varkappa^0 = \frac{1}{K}\left\{\frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial u_1}v_1 + \frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial u_2}v_2\right\},$$

$$\gamma_\varkappa^0 = -\frac{i}{K}\left\{\frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial u_1'}v_1 + \frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial u_2'}v_2\right\},$$

wenn

$$K = \left\{\sum_{\varkappa=1,2,3}\left(\frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial u_1}v_1 + \frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial u_2}v_2\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ist.

Nennen wir den gemeinschaftlichen Nenner der durch Thetafunctionen dargestellten Ausdrücke N, so erhalten die Ausdrücke $\frac{\partial \alpha_x}{\partial u_1} v_1 + \frac{\partial \alpha_x}{\partial u_2} v_2$ den Nenner N^2; der Zähler wird, abgesehen von dem Factor i_λ, folgendermassen lauten:

$$\begin{aligned}
&\vartheta(u_1', u_2')_\delta\, \vartheta(u_1', u_2')_\lambda \Big\{ \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} \Big(\frac{\partial}{\partial u_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} v_2 \Big) \vartheta(u_1, u_2)_{\lambda\varepsilon} \\
&\qquad\qquad - \vartheta(u_1, u_2)_{\lambda\varepsilon} \Big(\frac{\partial}{\partial u_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} v_2 \Big) \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} \Big\} \\
&+ \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\, \vartheta(u_1', u_2')_{\lambda\varepsilon} \Big\{ \vartheta(u_1, u_2)_\delta \Big(\frac{\partial}{\partial u_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} v_2 \Big) \vartheta(u_1, u_2)_\lambda \\
&\qquad\qquad - \vartheta(u_1, u_2)_\lambda \Big(\frac{\partial}{\partial u_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} v_2 \Big) \vartheta(u_1, u_2)_\delta \Big\} \\
&- \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\, \vartheta(u_1', u_2')_\lambda \Big\{ \vartheta(u_1, u_2)_\delta \Big(\frac{\partial}{\partial u_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} v_2 \Big) \vartheta(u_1, u_2)_{\lambda\varepsilon} \\
&\qquad\qquad - \vartheta(u_1, u_2)_{\lambda\varepsilon} \Big(\frac{\partial}{\partial u_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} v_2 \Big) \vartheta(u_1, u_2)_\delta \Big\} \\
&- \vartheta(u_1', u_2')_\delta\, \vartheta(u_1', u_2')_{\lambda\varepsilon} \Big\{ \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} \Big(\frac{\partial}{\partial u_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} v_2 \Big) \vartheta(u_1, u_2)_\lambda \\
&\qquad\qquad - \vartheta(u_1, u_2)_\lambda \Big(\frac{\partial}{\partial u_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} v_2 \Big) \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} \Big\}.
\end{aligned}$$

Die beiden ersten Glieder dieses Ausdrucks repräsentiren, als Function von u_1, u_2 betrachtet, eine Thetafunction zweiter Ordnung mit der zum Index $\lambda\delta$ gehörenden Charakteristik, während die beiden anderen eine Thetafunction zweiter Ordnung mit dem Index $\lambda\delta\varepsilon$ darstellen.

Demnach dürfen wir den ersten gleich:

$$\begin{aligned}
&C_1 \vartheta(u_1 + u_1', u_2 + u_2')_{13\lambda\delta}\, \vartheta(u_1 - u_1', u_2 - u_2')_{13} + C_2 \vartheta(u_1 + u_1', u_2 + u_2')_{13}\, \vartheta(u_1 - u_1', u_2 - u_2')_{13\lambda\delta} \\
&+ C_3 \vartheta(u_1 + u_1', u_2 + u_2')_{13\lambda\delta\varepsilon}\, \vartheta(u_1 - u_1', u_2 - u_2')_{13\varepsilon} + C_4 \vartheta(u_1 + u_1', u_2 + u_2')_{13\varepsilon}\, \vartheta(u_1 - u_1', u_2 - u_2)_{13\lambda\delta\varepsilon}
\end{aligned}$$

setzen, während wir für den anderen die Form:

$$\begin{aligned}
&- C_1' \vartheta(u_1 + u_1', u_2 + u_2')_{13\lambda\delta}\, \vartheta(u_1 - u_1', u_2 - u_2')_{13\varepsilon} - C_2' \vartheta(u_1 + u_1', u_2 + u_2')_{13\varepsilon}\, \vartheta(u_1 - u_1', u_2 - u_2')_{13\lambda\delta} \\
&- C_3' \vartheta(u_1 + u_1', u_2 + u_2')_{13\lambda\delta\varepsilon}\, \vartheta(u_1 - u_1', u_2 - u_2')_{13} - C_4' \vartheta(u_1 + u_1', u_2 + u_2')_{13}\, \vartheta(u_1 - u_1', u_2 - u_2')_{13\lambda\delta\varepsilon}
\end{aligned}$$

annehmen dürfen.

Wenn wir in dem ersten Bestandtheil des zu transformirenden Ausdrucks u_1, u_2 mit $-u_1$, $-u_2$ vertauschen, so ändert er sich nur insofern, als er den Factor

$$-(-1)^{n_1^\lambda m_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda + m_1^\delta n_1^\delta + m_2^\delta n_2^\delta} = -(-1)^{n_1^{\lambda\varepsilon} m_1^{\lambda\varepsilon} + n_2^{\lambda\varepsilon} m_2^{\lambda\varepsilon} + n_1^{\delta\varepsilon} m_1^{\delta\varepsilon} + n_2^{\delta\varepsilon} m_2^{\delta\varepsilon}}$$

aufnimmt. Daraus folgt, dass

$$C_2(-1)^{\sum_a (m_a^\lambda n_a^\lambda + m_a^\delta n_a^\delta)} = C_1, \qquad C_4(-1)^{\sum_a m_a^{\lambda\varepsilon} n_a^{\lambda\varepsilon} + \sum_a m_a^{\delta\varepsilon} n_a^{\delta\varepsilon}} = C_3$$

werden muss. Bezeichnet man abkürzend den Ausdruck

$$m_1^\mu n_1^\mu + m_2^\mu n_2^\mu$$

durch $|\mu|$, so ist also

$$C_1(-1)^{|\lambda|} = C_2(-1)^{|\delta|} = E_1 \quad \text{und} \quad C_3(-1)^{|\lambda\varepsilon|} = C_4(-1)^{|\delta\varepsilon|} = E_2.$$

Indem wir nach einander für u_1, u_2 die zu den Indices 13λ und $13\lambda\varepsilon$ gehörenden halben Perioden setzen, erhalten wir für E_1 und E_2 die Ausdrücke:

$$\tfrac{1}{2}(-1)^{n\lambda} \vartheta_{13\lambda\delta\varepsilon}(v_1 \vartheta_{13\varepsilon}^{(1)} + v_2 \vartheta_{13\varepsilon}^{(2)}) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(-1)^{n\lambda} \vartheta_{13\lambda\delta}(v_1 \vartheta_{13}^{(1)} + v_2 \vartheta_{13}^{(2)}).$$

In derselben Weise ergiebt sich, dass:

$$C_1'(-1)^{|\lambda|} = C_2'(-1)^{|\delta|} = \tfrac{1}{2}(-1)^{n\lambda} \vartheta_{13\lambda\delta\varepsilon}(v_1 \vartheta_{13}^{(1)} + v_2 \vartheta_{13}^{(2)}),$$

$$C_3'(-1)^{|\lambda\varepsilon|} = C_4'(-1)^{|\delta\varepsilon|} = \tfrac{1}{2}(-1)^{n\lambda} \vartheta_{13\lambda\delta}(v_1 \vartheta_{13\varepsilon}^{(1)} + v_2 \vartheta_{13\varepsilon}^{(2)})$$

wird. Im Ganzen ergiebt sich also

$$N^2\left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial u_1} v_1 + \frac{\partial \alpha_x}{\partial u_2} v_2\right)$$

$$\begin{aligned}
= \tfrac{1}{2} i_\lambda (-1)^{n\lambda} \Big\{ &(-1)^{|\lambda|} \vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{13\lambda\delta} \vartheta_{13\lambda\delta\varepsilon} [\vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{13}(v_1 \vartheta_{13\varepsilon}^{(1)} + v_2 \vartheta_{13\varepsilon}^{(2)}) \\
&\qquad - \vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{13\varepsilon}(v_1 \vartheta_{13}^{(1)} + v_2 \vartheta_{13}^{(2)})] \\
&-(-1)^{|\lambda\varepsilon|} \vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{13\lambda\delta\varepsilon} \vartheta_{13\lambda\delta} [\vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{13}(v_1 \vartheta_{13\varepsilon}^{(1)} + v_2 \vartheta_{13\varepsilon}^{(2)}) \\
&\qquad - \vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{13\varepsilon}(v_1 \vartheta_{13}^{(1)} + v_2 \vartheta_{13}^{(2)})] \\
&+ \vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{13\lambda\delta} \vartheta_{13\lambda\delta\varepsilon} [(-1)^{|\delta|} \vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{13}(v_1 \vartheta_{13\varepsilon}^{(1)} + v_2 \vartheta_{13\varepsilon}^{(2)}) \\
&\qquad - (-1)^{|\delta\varepsilon|} \vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{13\varepsilon}(v_1 \vartheta_{13}^{(1)} + v_2 \vartheta_{13\varepsilon}^{(2)})] \\
&- \vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{13\lambda\delta\varepsilon} \vartheta_{13\lambda\delta} [(-1)^{|\delta|} \vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{13}(v_1 \vartheta_{13\varepsilon}^{(1)} + v_2 \vartheta_{13\varepsilon}^{(2)}) \\
&\qquad - (-1)^{|\delta\varepsilon|} \vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{13\varepsilon}(v_1 \vartheta_{13}^{(1)} + v_2 \vartheta_{13}^{(2)})] \Big\}.
\end{aligned}$$

Der entsprechende Ausdruck für u_1', u_2', d. h. $N^2\left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial u_1'} v_1 + \frac{\partial \alpha_x}{\partial u_2'} v_2\right)$, entsteht aus dem eben entwickelten einfach, indem wir u_1, u_2 mit u_1', u_2' vertauschen. Demnach erhalten wir:

$$KN^2\{\beta_x'' \pm i\gamma_x''\} = N^2\left\{\frac{\partial \alpha_x}{\partial u_1} v_1 + \frac{\partial \alpha_x}{\partial u_2} v_2 \pm \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial u_1'} v_1 + \frac{\partial \alpha_x}{\partial u_2'} v_2\right)\right\}$$

$$\begin{aligned}
= (-1)^{n\lambda} i_\lambda &[(\pm 1)^{|\lambda|} \vartheta(u_1 \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13\lambda\delta} \vartheta_{13\lambda\delta\varepsilon} - (\pm 1)^{|\lambda\varepsilon|} \vartheta(u_1 \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13\lambda\delta\varepsilon} \vartheta_{13\lambda\delta}] \\
&\times [(\mp 1)^{|\delta|} \vartheta(u_1 \pm u_1', u_2 \pm u_2')_{13}(v_1 \vartheta_{13\varepsilon}^{(1)} + v_2 \vartheta_{13\varepsilon}^{(2)}) \\
&\qquad - (\mp 1)^{|\delta\varepsilon|} \vartheta(u_1 \pm u_1', u_2 \pm u_2')_{13\varepsilon}(v_1 \vartheta_{13}^{(1)} + v_2 \vartheta_{13}^{(2)})].
\end{aligned}$$

Die Grösse K erhalten wir mit Rücksicht auf

$$\sum_{\varkappa=1,2,3}(\beta_\varkappa'' + i\gamma_\varkappa'')(\beta_\varkappa'' - i\gamma_\varkappa'') = 2$$

durch die Gleichung:

$$\begin{aligned}2K^2N^4 = \Big\{\sum_{\lambda=\alpha,\beta,\gamma} i_\lambda'^2 &[\vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{13\lambda\delta}\vartheta_{13\lambda\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{13\lambda\delta\varepsilon}\vartheta_{13\lambda\delta}] \\ &[(-1)^{|\lambda|}\vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{13\lambda\delta}\vartheta_{13\lambda\delta\varepsilon} - (-1)^{|\lambda\varepsilon|}\vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{13\lambda\delta\varepsilon}\vartheta_{13\lambda\delta}]\Big\} \\ \times &[(-1)^{|\delta|}\vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{13}(v_1\vartheta_{13\varepsilon}^{(1)} + v_2\vartheta_{13\varepsilon}^{(2)}) \\ &\qquad - (-1)^{|\delta\varepsilon|}\vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{13\varepsilon}(v_1\vartheta_{13}^{(1)} + v_2\vartheta_{13}^{(2)})] \\ \times &[\vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{13}(v_1\vartheta_{13\varepsilon}^{(1)} + v_2\vartheta_{13\varepsilon}^{(2)}) - \vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{13\varepsilon}(v_1\vartheta_{13}^{(1)} + v_2\vartheta_{13}^{(2)})].\end{aligned}$$

Der Ausdruck unter dem Summenzeichen hat aber, wie eine leichte Rechnung zeigt, den Werth:

$$2(-1)^{\sum_\beta n_\beta^{13\varepsilon} m_\beta^{\delta} + \sum_\beta n_\beta^{13} m_\beta^{13\delta\varepsilon}} \big(\vartheta(u_1', u_2')_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1, u_2)_\delta\big)^2.$$

Man erhält also:

$$(62.)\quad \begin{cases} \beta_\varkappa'' \pm i\gamma_\varkappa'' \\ = i_\lambda' \dfrac{(\pm 1)^{|\lambda|}\vartheta(u_1 \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13\lambda\delta}\vartheta_{13\lambda\delta\varepsilon} - (\pm 1)^{|\lambda\varepsilon|}\vartheta(u_1 \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13\alpha\delta\varepsilon}\vartheta_{13\alpha\delta}}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1, u_2)_\delta} \\ \times \left\{\dfrac{(-1)^\delta\vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{13}(v_1\vartheta_{13\varepsilon}^{(1)} + v_2\vartheta_{13\varepsilon}^{(2)}) - (-1)^{|\delta\varepsilon|}\vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{13\varepsilon}(v_1\vartheta_{13}^{(1)} + v_2\vartheta_{13}^{(2)})}{\vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{13}(v_1\vartheta_{13\varepsilon}^{(1)} + v_2\vartheta_{13\varepsilon}^{(2)}) - \vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{13\varepsilon}(v_1\vartheta_{13}^{(1)} + v_2\vartheta_{13}^{(2)})}\right\}^{\pm 1}, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$i_\lambda' = i_\lambda e^{-i\frac{\pi}{2}\sum_\beta(n_\beta^{13\varepsilon} m_\beta^{\delta} + n_\beta^{13} m_\beta^{13\delta\varepsilon})}(-1)^{n_\gamma}$$

gesetzt ist. Ein einfacheres System von Richtungscosinus erhalten wir offenbar, indem wir auf der rechten Seite von (62.) den letzten Factor einfach unterdrücken. Demnach kann das allgemeinste Werthsystem in der Form

$$(63.)\quad \begin{cases} \beta_\varkappa \pm i\gamma_\varkappa \\ = i_\lambda' \dfrac{(\pm 1)^{|\lambda|}\vartheta(u_1 \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13\lambda\delta}\vartheta_{13\lambda\delta\varepsilon} - (\pm 1)^{|\lambda\varepsilon|}\vartheta(u_1 \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13\lambda\delta\varepsilon}\vartheta_{13\lambda\delta}}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1, u_2)_\delta} S^{\pm 1} \end{cases}$$

angesetzt werden.

Die Grösse S bestimmen wir, indem wir die beiden Ausdrücke

$$p' = \alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r$$

und

$$p' = \gamma_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\beta_3}{dt}$$

für die Rotationsgeschwindigkeit in Bezug auf die Axe des Impulses mit einander vergleichen. Die erstgenannte Formel giebt:

$$p' = \sum_{\varkappa=1,2,3} \alpha_\varkappa \left\{ g_3\alpha_\varkappa - i\left(\frac{\partial \ln N}{\partial u_1'} g_1 + \frac{\partial \ln N}{\partial u_2'} g_2'\right)\alpha_\varkappa - ig_1 \frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial u_1'} - ig_2 \frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial u_2'} \right\}$$

$$= g_3 - i\left(\frac{\partial \ln N}{\partial u_1'} g_1 + \frac{\partial \ln N}{\partial u_2'} g_2\right),$$

während die andere Definition für p' folgende Darstellung liefert:

$$p' = \frac{i}{2} \sum_{\varkappa=1,2,3} (\beta_\varkappa - i\gamma_\varkappa) \frac{d(\beta_\varkappa + i\gamma_\varkappa)}{dt}$$

$$= i\left(\frac{\frac{dS}{dt}}{S} - \frac{\frac{dN}{dt}}{N}\right)$$

$$+ \frac{i}{2N^2} \sum_{\varkappa=\alpha,\beta,\gamma} i_\varkappa'^2 \left((-1)^{|\varkappa|} \vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{13\varkappa\delta} \vartheta_{13\varkappa\delta\varepsilon} - (-1)^{|\varkappa\varepsilon|} \vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{13\varkappa\delta\varepsilon} \vartheta_{13\varkappa\delta}\right)$$

$$\times \frac{d}{dt}\left(\vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{13\varkappa\delta} \vartheta_{13\varkappa\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{13\varkappa\delta\varepsilon} \vartheta_{13\varkappa\delta}\right).$$

Die in diesem Ausdruck auftretende Summe kann nun aber offenbar auch folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{du_1}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial u_1'}\right) + \frac{du_2}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial u_2} - \frac{\partial}{\partial u_2'}\right)\right\}$$

$$\times \Sigma i_\varkappa'^2 \left((-1)^{|\varkappa|} \vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{13\varkappa\delta} \vartheta_{13\varkappa\delta\varepsilon} - (-1)^{|\varkappa\varepsilon|} \vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{13\varkappa\delta\varepsilon} \vartheta_{13\varkappa\delta}\right)$$

$$\times \left(\vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{13\varkappa\delta} \vartheta_{13\varkappa\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{13\varkappa\delta\varepsilon} \vartheta_{13\varkappa\delta}\right).$$

Da der Ausdruck unter dem Summenzeichen nichts anderes als $2N^2$ ist, so erhalten wir

$$p' = i\frac{\frac{dS}{dt}}{S} - i\left(\frac{\partial \ln N}{\partial u_1'} g_1 + \frac{\partial \ln N}{\partial u_2'} g_2\right).$$

Durch Vergleichung mit dem obigen Werthe ergiebt sich schliesslich:

$$(64.) \qquad \frac{d \ln S}{dt} = -ig_3 \quad \text{oder} \quad S = e^{-i(g_3 t + h_3)} = e^{-iu_3}.$$

Von den Componenten der Rotationsgeschwindigkeit in Bezug auf die im Raume festen Axen ist die eine p' schon bekannt; ausführlich geschrieben lautet dieselbe

$$p' = \frac{\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} \Delta\vartheta(u_1', u_2')_\delta - \vartheta(u_1, u_2)_\delta \Delta\vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}}{\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1', u_2')_\delta - \vartheta(u_1, u_2)_\delta \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}}.$$

Die beiden anderen Componenten erhält man aus den Formeln

$$q' = \beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r,$$
$$r' = \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r,$$

welche sich in die folgende zusammenziehen lassen:

$$\begin{aligned} q' \pm ir' &= \sum_{x=1,2,3} (\beta_x \pm i\gamma_x) \left\{ \left(g_3 - i \frac{\partial \ln N}{\partial u_1'} g_1 - i \frac{\partial \ln N}{\partial u_2'} g_2 \right) \alpha_x - i g_1 \frac{\partial \alpha_x}{\partial u_1'} - i g_2 \frac{\partial \alpha_x}{\partial u_2'} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x=1,2,3} (\beta_x \pm i\gamma_x) \left[\left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial u_1} - \frac{\partial \alpha_x}{\partial u_1'} \right) i g_1 + \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial u_2} - \frac{\partial \alpha_x}{\partial u_2'} \right) i g_2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{x=1,2,3} (\beta_x \pm i\gamma_x) \left[\left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial u_1} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial u_1'} \right) i g_1 + \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial u_2} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial u_2'} \right) i g_2 \right]. \end{aligned}$$

Wenn wir abkürzend

$$e^{i \frac{\pi}{2} \sum_\beta' (n_\beta^{13\varepsilon} m_\beta^\delta + n_\beta^{13} m_\beta^{13\delta\varepsilon})} = i_{\varepsilon\delta}$$

setzen, so können wir die Ableitungen von α_x in einfacher Weise durch die Winkel β_x und γ_x ausdrücken; führen wir dies aus, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & q' \pm ir' \\ = \; & \frac{1}{2} i i_{\varepsilon\delta} S^{+1} \frac{\vartheta(u_1 - u_1', u_2 - u_2')_{13} (g_1 \vartheta_{13\varepsilon}^{(1)} + g_2 \vartheta_{13\varepsilon}^{(2)}) - \vartheta(u_1 - u_1', u_2 - u_2')_{13\varepsilon} (g_1 \vartheta_{13}^{(1)} + g_2 \vartheta_{13}^{(2)})}{\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1', u_2')_\delta - \vartheta(u_1, u_2)_\delta \vartheta(u_1', u_2')_\delta} \\ & \times \sum_x (\beta_x \pm i\gamma_x)(\beta_x - i\gamma_x) \\ - & \frac{1}{2} i i_{\varepsilon\delta} S^{-1} \frac{(-1)^{|\delta|} \vartheta(u_1 + u_1', u_2 + u_2')_{13} (g_1 \vartheta_{13\varepsilon}^{(1)} + g_2 \vartheta_{13\varepsilon}^{(2)}) - (-\vartheta)^{|\delta\varepsilon|} \vartheta(u_1 + u_1', u_2 + u_2')_{13\varepsilon} (g_1 \vartheta_{13}^{(1)} + g_2 \vartheta_{13}^{(2)})}{\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1', u_2')_\delta - \vartheta(u_1, u_2)_\delta \vartheta(u_1', u_2')_\delta} \\ & \times \sum_x (\beta_x \pm i\gamma_x)(\beta_x + i\gamma_x), \end{aligned}$$

und hieraus, indem wir bedenken, dass sowohl 13 als 13ε ungerade Indices sind,

$$(65.) \quad \left\{ \begin{aligned} & q' \pm ir' \\ & = \mp i_{\varepsilon\delta} \frac{(\pm 1)^{|\delta|} \vartheta(u_1 \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13} \Delta\vartheta_{13\varepsilon} - (\pm 1)^{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1 \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13\varepsilon} \Delta\vartheta_{13}}{\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1', u_2')_\delta - \vartheta(u_1, u_2)_\delta \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}} e^{\mp u_3 i}. \end{aligned} \right.$$

§ 10.

Die Coordinaten des Anfangspunktes des mit dem Körper fest verbundenen Coordinatensystems.

Aus den unter (5.) angeführten Integralgleichungen des Problems erhält man unmittelbar:

$$\begin{aligned} J(\zeta \mp i\eta) &= \frac{\partial T}{\partial p} (\beta_1 \pm i\gamma_1) + \frac{\partial T}{\partial q} (\beta_2 \pm i\gamma_2) + \frac{\partial T}{\partial r} (\beta_3 \pm i\gamma_3) \\ &= -i \sum_{x=1,2,3} (\beta_x \pm i\gamma_x) \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial u_1'} g_1' + \frac{\partial \alpha_x}{\partial u_2'} g_2' \right). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich aber von dem für $q' \pm ir'$ angegebenen nur dadurch, dass an Stelle der Grössen g_1 und g_2 die Grössen g'_1, g'_2 getreten sind.

Daher erhalten wir hier:

$$(66.)\begin{cases} \eta \pm i\zeta = \\ -i\,\dfrac{i_{\varepsilon\delta}}{J}\,\dfrac{(\pm 1)^{|\delta|}\vartheta(u_1 \mp u'_1, u_2 \mp u'_2)_{12}\,\Delta'\vartheta_{13\varepsilon} - (\pm 1)^{|\delta\varepsilon|}\vartheta(u_1 \mp u'_1, u_2 \mp u'_2)\,\Delta'\vartheta_{12}}{\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon}\,\vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta} - \vartheta(u_1, u_2)_{\delta}\,\vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon}}\, e^{\mp u_3 i}. \end{cases}$$

Die Grösse ξ erhalten wir aus der Gleichung

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = g_4 - \frac{i}{J}\sum_{x}\Big(\frac{\partial b_x y_x}{\partial u'_1}\,g'_1 + \frac{\partial b_x y_x}{\partial u'_2}\,g'_2\Big)\alpha_x.$$

Wir setzen nun:

$$\begin{aligned}
\overset{u}{\nabla} f(u_1, u_2, u'_1, u'_2, u_3) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial u_1}\,g_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\,g_2\Big),\\
\overset{u}{\nabla}' f(u_1, u_2, u'_1, u'_2, u_3) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial u_1}\,g'_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\,g'_2\Big),\\
\overset{u'}{\nabla} f(u_1, u_2, u'_1, u'_2, u_3) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial u'_1}\,g_1 + \frac{\partial f}{\partial u'_2}\,g_2\Big),\\
\overset{u'}{\nabla}' f(u_1, u_2, u'_1, u'_2, u_3) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial u'_1}\,g'_1 + \frac{\partial f}{\partial u'_2}\,g'_2\Big).
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\Sigma\alpha_x \overset{u}{\nabla}(\beta_x \pm i\gamma_x) &= \pm i(q' \pm ir'),\\
\Sigma(\beta \mp i\gamma_x)\overset{u}{\nabla}(\beta_x \pm i\gamma_x) &= \mp 2p'_1 i = \mp 2(p' - g_3)i = \mp 2\overset{u'}{\nabla}\ln N,\\
\Sigma(\beta \pm i\gamma_x)\overset{u}{\nabla}(\beta_x \pm i\gamma_x) &= 0.
\end{aligned}$$

Die Functionen β und γ ändern ihr Zeichen, wenn die Werthepaare u_1, u_2 und u'_1, u'_2 vertauscht werden, während die α dabei ungeändert bleiben. Wir erhalten demnach

$$\Sigma\alpha_x \overset{u'}{\nabla}(\beta_x \pm i\gamma_x)$$

aus dem entsprechenden für u, indem wir in $\pm i(q' \pm ir')$ das Vorzeichen ändern und gleichzeitig die Werthepaare vertauschen. Dabei ändert sich der Ausdruck $-i(q' - ir')$ nicht, während der andere Ausdruck sein Vorzeichen ändert. Demnach ist:

$$\Sigma\alpha_x \overset{u'}{\nabla}(\beta_x \pm i\gamma_x) = -i(q' \pm ir').$$

Wir setzen ferner:

$$\Sigma\alpha_x\overset{u}{\nabla}'(\beta_x\pm i\gamma_x) = \mp\Sigma\alpha_x\overset{u'}{\nabla}'(\beta_x\pm i\gamma_x) = \pm i(\bar{q}'\pm i\bar{r}'),$$

$$\Sigma(\beta_x\mp i\gamma_x)\overset{u}{\nabla}'(\beta_x\pm i\gamma_x) = \mp 2\,\bar{p}_1'\,i = \mp 2\overset{u'}{\nabla}'\ln N,$$

$$\Sigma(\beta_x\mp i\gamma_x)\overset{u'}{\nabla}(\beta_x\pm i\gamma_x) = \mp 2P'\,i = \mp 2\overset{u}{\nabla}\ln N,$$

$$\Sigma(\beta_x\mp i\gamma_x)\overset{u'}{\nabla}'(\beta_x\pm i\gamma_x) = \mp 2P''i = \mp 2\overset{u}{\nabla}'\ln N.$$

Hieraus erhalten wir folgende Werthe:

$$2\overset{u}{\nabla}(\alpha_x) = -i((q'+ir')(\beta_x-i\gamma_x)-(q'-ir')(\beta_x+i\gamma_x)),$$

$$2\overset{u}{\nabla}'(\alpha_x) = -i((\bar{q}'+i\bar{r}')(\beta_x-i\gamma_x)-(\bar{q}'-i\bar{r}')(\beta_x+i\gamma_x)),$$

$$2\overset{u'}{\nabla}(\alpha_x) = +i((q'+ir')(\beta_x-i\gamma_x)+(q'-ir')(\beta_x+i\gamma_x)),$$

$$2\overset{u'}{\nabla}'(\alpha_x) = +i((\bar{q}'+i\bar{r}')(\beta_x-i\gamma_x)+(\bar{q}'-i\bar{r}')(\beta_x+i\gamma_x)).$$

$$\overset{u}{\nabla}(\beta_x\pm i\gamma_x) = \pm i(q'\pm ir')\alpha_x\mp\overset{u'}{\nabla}\ln N(\beta_x\pm i\gamma_x),$$

$$\overset{u}{\nabla}'(\beta_x\pm i\gamma_x) = \pm i(\bar{q}'\pm i\bar{r}')\alpha_x\mp\overset{u'}{\nabla}'\ln N(\beta_x\pm i\gamma_x),$$

$$\overset{u'}{\nabla}(\beta_x\pm i\gamma_x) = -i(q'\pm ir')\alpha_x\mp\overset{u}{\nabla}\ln N(\beta_x\pm i\gamma_x),$$

$$\overset{u'}{\nabla}'(\beta_x\pm i\gamma_x) = -i(\bar{q}'\pm i\bar{r}')\alpha_x\mp\overset{u}{\nabla}'\ln N(\beta_x\pm i\gamma_x).$$

Mit Hülfe dieser Formeln lässt sich nun $\frac{d\xi}{dt}$ so transformiren, dass der Ausdruck integrabel wird. Es ist nämlich:

$$\frac{d\xi}{dt} = g_4-\frac{1}{J}\Big(\overset{u'}{\nabla}'\overset{u'}{\nabla}\ln N-\sum_x(\overset{u'}{\nabla}\alpha_x)(\overset{u'}{\nabla}'\alpha_x)\Big)$$

$$= g_4-\frac{1}{J}\Big(\overset{u'}{\nabla}'\overset{u'}{\nabla}\ln N+(q'q'+r'\bar{r}')\Big).$$

Vermittelst der obigen Ausdrücke für $\overset{u}{\nabla}\ln N$ und $\overset{u}{\nabla}'\ln N$ kann man nun auf zwei verschiedene Weisen $\overset{u}{\nabla}\overset{u}{\nabla}'\ln N$ durch die Grössen β und γ sowie deren erste und zweite Ableitungen ausdrücken. Aehnliches gilt von $\overset{u'}{\nabla}\overset{u'}{\nabla}'\ln N$. Aus der Differenz beider verschwinden die zweiten Ableitungen und wir erhalten

$$4\overset{u}{\nabla}\overset{u}{\nabla}'\ln N-4\overset{u'}{\nabla}\overset{u'}{\nabla}'\ln N$$

$$= \sum_x\Big(\overset{u}{\nabla}(\beta_x+i\gamma_x)\overset{u'}{\nabla}'(\beta_x-i\gamma_x)+\overset{u}{\nabla}'(\beta_x+i\gamma_x)\overset{u'}{\nabla}(\beta_x-i\gamma_x)\Big)$$

$$-\Sigma\Big(\overset{u'}{\nabla}(\beta_x+i\gamma_x)\overset{u}{\nabla}'(\beta_x-i\gamma_x)+\overset{u'}{\nabla}'(\beta_x+i\gamma_x)\overset{u}{\nabla}(\beta_x-i\gamma_x)\Big)$$

$$= 4(q'\bar{q}'+r'\bar{r}')N^2.$$

Demnach ist:

$$q'\bar{q}'+r'\bar{r}' = \overset{u}{\nabla}\overset{u}{\nabla}'\ln N - \overset{u'}{\nabla}\overset{u'}{\nabla}'\ln N .$$

und folglich

$$\frac{d\xi}{dt} = g_4 - \frac{1}{J}\overset{u}{\nabla}\overset{u}{\nabla}'\ln N = g_4 - \frac{1}{J}\frac{d}{dt}(\overset{u}{\nabla}'\ln N).$$

Durch Integration ergiebt sich hieraus

$$\xi = g_4 t + h_4' - \frac{1}{J}\,\frac{\overset{u}{\nabla}'\,\vartheta(u_1,u_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1',u_2')_\delta - \overset{u}{\nabla}'\,\vartheta(u_1,u_2)_\delta\vartheta(u_1',u_2')_{\delta\varepsilon}}{\vartheta(u_1,u_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1',u_2')_\delta - \vartheta(u_1,u_2)_\delta\vartheta(u_1',u_2')_{\delta\varepsilon}},$$

oder, wenn wir auch hier die Operation $\varDelta'$ einführen:

$$(67.)\qquad \xi = g_4 t + h_4 - \frac{i}{J}\,\frac{\varDelta'\vartheta(u_1,u_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1',u_2')_\delta - \varDelta'\vartheta(u_1,u_2)_\delta\vartheta(u_1',u_2')_{\delta\varepsilon}}{\vartheta(u_1,u_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1',u_2')_\delta - \vartheta(u_1,u_2)_\delta\vartheta(u_1',u_2')_{\delta\varepsilon}}.$$

§ 11.

Zusammenstellung der Resultate.

Das Resultat unserer Untersuchung ist folgendes:

Es lassen sich alle Grössen, welche zur Bestimmung der Lage und des Bewegungszustandes des Körpers in der Flüssigkeit erforderlich sind, durch Thetafunctionen mit zwei Argumenten rational darstellen, deren Argumente selbst reelle lineare Functionen der Zeit sind.

Bezeichnen wir mit $g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4\ -i\frac{g_3}{J};\ g_1',\ g_2',\ g_3'$ reelle Constanten, durch

$$u_\alpha = g_\alpha t + h_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

lineare Functionen der Zeit, durch u_1', u_2' gewisse Constanten, durch α, β, γ, δ, ε einfache Indices, durch $i_\varkappa$, $i_\varkappa'$, $i_{\varepsilon\delta}$ Potenzen von i, so stellt sich die Lösung des vorher behandelten Problems in folgender Weise dar:

I. Die nach den Axen des Körpers genommenen Componenten des Impulses:

$$\frac{\partial T}{\partial u} = i_\alpha J\,\frac{\vartheta(u_1',u_2')_\alpha\vartheta(u_1,u_2)_{\alpha\varepsilon} - \vartheta(u_1',u_2')_{\alpha\varepsilon}\vartheta(u_1,u_2)_\alpha}{\vartheta(u_1',u_2')_\delta\vartheta(u_1,u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1',u_2')_{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1,u_2)_\delta},$$

$$\frac{\partial T}{\partial v} = i_\beta J\,\frac{\vartheta(u_1',u_2')_\beta\vartheta(u_1,u_2)_{\beta\varepsilon} - \vartheta(u_1',u_2')_{\beta\varepsilon}\vartheta(u_1,u_2)_\beta}{\vartheta(u_1',u_2')_\delta\vartheta(u_1,u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1',u_2')_{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1,u_2)_\delta},$$

$$\frac{\partial T}{\partial w} = i_\gamma J\,\frac{\vartheta(u_1',u_2')_\gamma\vartheta(u_1,u_2)_{\gamma\varepsilon} - \vartheta(u_1',u_2')_{\gamma\varepsilon}\vartheta(u_1,u_2)_\gamma}{\vartheta(u_1',u_2')_\delta\vartheta(u_1,u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1',u_2')_{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1,u_2)_\delta}.$$

II. Die Momente des Impulses in Bezug auf die Axen des Körpers:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = i_\alpha \frac{\Delta' \vartheta(u'_1, u'_2)_\alpha \vartheta(u_1, u_2)_{\alpha\varepsilon} - \Delta' \vartheta(u'_1, u'_2)_{\alpha\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\alpha}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta},$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = i_\beta \frac{\Delta' \vartheta(u'_1, u'_2)_\beta \vartheta(u_1, u_2)_{\beta\varepsilon} - \Delta' \vartheta(u'_1, u'_2)_{\beta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\beta}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta},$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = i_\gamma \frac{\Delta' \vartheta(u'_1, u'_2)_\gamma \vartheta(u_1, u_2)_{\gamma\varepsilon} - \Delta' \vartheta(u'_1, u'_2)_{\gamma\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\gamma}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta}.$$

(Das Zeichen Δ' bezeichnet die Operation

$$g'_3 f(x_1, x_2) - i g'_1 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} - i g'_2 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}.)$$

III. Die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit nach den Axen des Körpers:

$$p = i_\alpha \frac{\Delta \vartheta(u'_1, u'_2)_\alpha \vartheta(u_1, u_2)_{\alpha\varepsilon} - \Delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{\alpha\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\alpha}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta},$$

$$q = i_\beta \frac{\Delta \vartheta(u'_1, u'_2)_\beta \vartheta(u_1, u_2)_{\beta\varepsilon} - \Delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{\beta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\beta}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta},$$

$$r = i_\gamma \frac{\Delta \vartheta(u'_1, u'_2)_\gamma \vartheta(u_1, u_2)_{\gamma\varepsilon} - \Delta \vartheta(u'_1, u'_2)_{\gamma\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\gamma}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta}.$$

IV. Die Componenten der Geschwindigkeit des Mittelpunktes nach den Axen des Körpers:

$$u = \frac{1}{J} \left\{ g_4 \frac{\partial T}{\partial u} - i g'_1 \frac{\partial p}{\partial u'_1} - i g'_2 \frac{\partial p}{\partial u'_2} \right\},$$

$$v = \frac{1}{J} \left\{ g_4 \frac{\partial T}{\partial v} - i g'_1 \frac{\partial q}{\partial u'_1} - i g'_2 \frac{\partial q}{\partial u'_2} \right\},$$

$$w = \frac{1}{J} \left\{ g_4 \frac{\partial T}{\partial w} - i g'_1 \frac{\partial r}{\partial u'_1} - i g'_2 \frac{\partial r}{\partial u'_2} \right\}.$$

V. Die neun Richtungscosinus:

$$\alpha_1 = i_\alpha \frac{\vartheta(u'_1, u'_2)_\alpha \vartheta(u_1, u_2)_{\alpha\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\alpha\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\alpha}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta},$$

$$\alpha_2 = i_\beta \frac{\vartheta(u'_1, u'_2)_\beta \vartheta(u_1, u_2)_{\beta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\beta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\beta}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta},$$

$$\alpha_3 = i_\gamma \frac{\vartheta(u'_1, u'_2)_\gamma \vartheta(u_1, u_2)_{\gamma\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\gamma\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\gamma}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta},$$

$$\beta_1 \pm i\gamma_1 = i'_\alpha \frac{(\pm 1)^{|\alpha|} \vartheta(u_1 \mp u'_1, u_2 \mp u'_2)_{13\alpha\delta} \vartheta_{13\alpha\delta\varepsilon} - (\pm 1)^{|\alpha\varepsilon|} \vartheta(u_1 \mp u'_1, u_2 \mp u'_2)_{13\alpha\delta\varepsilon} \vartheta_{13\alpha\delta}}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta} e^{\mp i u_3},$$

$$\beta_2 \pm i\gamma_2 = i'_\beta \frac{(\pm 1)^{|\beta|} \vartheta(u_1 \mp u'_1, u_2 \mp u'_2)_{13\beta\delta} \vartheta_{13\beta\delta\varepsilon} - (\pm 1)^{|\beta\varepsilon|} \vartheta(u_1 \mp u'_1, u_2 \mp u'_2)_{13\beta\delta\varepsilon} \vartheta_{13\beta\delta}}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta} e^{\mp i u_3},$$

$$\beta_3 \pm i\gamma_3 = i'_\gamma \frac{(\pm 1)^{|\gamma|} \vartheta(u_1 \mp u'_1, u_2 \mp u'_2)_{13\gamma\delta} \vartheta_{13\gamma\delta\varepsilon} - (\pm 1)^{|\gamma\varepsilon|} \vartheta(u_1 \mp u'_1, u_2 \mp u'_2)_{13\gamma\delta\varepsilon} \vartheta_{13\gamma\delta}}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta} e^{\mp i u_3}.$$

VI. Die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit nach den drei im Raume festen Axen:

$$p' = \frac{\varDelta\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \varDelta\vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1, u_2)_\delta}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1, u_2)_\delta},$$

$$q' \pm ir' = \mp i_{\varepsilon\delta} \frac{(\pm 1)^{|\delta|}\vartheta(u_1 \mp u'_1, u_2 \mp u'_2)_{13}\varDelta\vartheta_{13\varepsilon} - (\pm 1)^{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1 \mp u'_1, u_2 \mp u'_2)_{13\varepsilon}\varDelta\vartheta_{13}}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1, u_2)_\delta} e^{\mp iu_3}.$$

VII. Die Coordinaten des Mittelpunktes:

$$\xi = u_4 - \frac{i}{J} \frac{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \varDelta'\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon}\varDelta'\vartheta(u_1, u_2)_\delta}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1, u_2)_\delta},$$

$$\eta \pm i\zeta = -\frac{ii_{\varepsilon\delta}}{J} \frac{(\pm 1)^{|\delta|}\vartheta(u_1 \mp u'_1, u_2 \mp u'_2)_{13}\varDelta'\vartheta_{13\varepsilon} - (\pm 1)^{|\delta\varepsilon|}\vartheta(u_1 \mp u'_1, u_2 \mp u'_2)_{13\varepsilon}\varDelta'\vartheta_{13}}{\vartheta(u'_1, u'_2)_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u'_1, u'_2)_{\delta\varepsilon}\vartheta(u_1, u_2)_\delta} e^{\mp iu_3}.$$

Zum Schluss mag die Bemerkung gestattet sein, dass die Formeln für die Richtungscosinus den charakteristischen Bedingungen genügen, unabhängig von der Bedeutung der Grössen u_1, u_2, u'_1, u'_2, u_3. Es erscheint daher nicht ausgeschlossen, dass die betreffenden Formeln, wenn man in ihnen für die fünf Argumente passend gewählte Functionen der Zeit setzt, auch zur Lösung anderer Rotationsprobleme dienen können.

Zur Theorie der Differenzengleichungen.

(Von Herrn *W. Heymann* in Plauen i. V.)

I.

Eine Transformation bei linearen simultanen Differenzengleichungen *).

Ein System von Differenzengleichungen

$$(1.)\qquad y_i^{x+1}+\sum_k f_{ik}y_k^x = 0 \qquad (i,\, k=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$

in welchem die f ganze Functionen von x bedeuten und die y^x von x abhängige Veränderliche sind, kann im Allgemeinen so transformirt werden, dass in jeder der n Gleichungen die Summe Σ einen linearen Factor ausscheiden lässt; das heisst also, das System (1.) kann übergeführt werden in

$$z_i^{x+1}+(x-\varepsilon_i)\sum_k \varphi_{ik}z_k^x = 0 \qquad (i,\, k=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$

wo nun die φ ebenfalls ganze Functionen von x sind.

Um die Transformation vorzunehmen, führe man in das System (1.) die linearen Substitutionen ein:

$$(2.)\qquad y_i^x = \sum_k a_{ik}z^x,$$

wobei die a von x unabhängig seien, dann entsteht

$$(3.)\qquad \Sigma a_{ik}z_k^{x+1}+\Sigma f_{ik}y_k^x = 0.$$

Bestimmt man hieraus die Veränderlichen z_1^{x+1} bis z_n^{x+1}, so erhält man n Gleichungen

$$(4.)\qquad Dz_i^{x+1}+A_{1i}\sum_1^n f_{1k}y_k^x+A_{2i}\sum_1^n f_{2k}y_k^x+\cdots+A_{ni}\sum_1^n f_{nk}y_k^x = 0,$$

in denen

$$D = |a_{ik}| \qquad (i,\, k=1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

und A_{ji} die Adjuncte von a_{ji} ist.

Ordnet man in den Gleichungen (4.) nach den Veränderlichen y_1^x bis

*) Die analoge Transformation für ein System von linearen Differentialgleichungen hat Verfasser im 98. Bd. dieses Journals mitgetheilt.

y_n^x, so ergiebt sich

$$(5.)\qquad Dz_i^{x+1}+y_1^x\sum_j A_{ji}f_{j1}+y_2^x\sum_j A_{ji}f_{j2}+\cdots+y_n^x\sum_j A_{ji}f_{jn} = 0 \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n).$$

Wenn man nun verlangt, dass sämmtliche Summen $\sum_j$ der ersten dieser Gleichungen den Factor $x-\varepsilon_1$, die der zweiten den Factor $x-\varepsilon_2$ u. s. f. ausscheiden lassen, so ergeben sich n Gruppen von je n Bedingungsgleichungen, von denen die $i$te folgendermassen lautet:

$$(6.)\qquad [\sum_j A_{ji}f_{j1}]_{x=\varepsilon_i}=0,\quad [\sum_j A_{ji}f_{j2}]_{x=\varepsilon_i}=0,\quad \ldots,\quad [\sum_j A_{ji}f_{jn}]_{x=\varepsilon_i}=0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Verhältnisse der n^2 Subdeterminanten A_{11} bis A_{nn} bestimmen, vorausgesetzt dass die Determinante

$$V = |f_{ik}| \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n)$$

für $x=\varepsilon_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ verschwindet.

Die mit V bezeichnete ganze Function von x wird im Allgemeinen den $n$ten Grad übersteigen, und da es nur darauf ankommt, n unter sich verschiedene Werthe ε_i für x herauszugreifen, welche V zum Verschwinden bringen, so wird es mehrere Gruppen von Werthen ε_i sowie a_{ik} geben, die alle dieselbe Transformation leisten. — Verschwindet V etwa für m verschiedene Werthe von x $(m>n$, wobei auch unter sich gleiche Wurzeln vorkommen dürfen), so lassen sich $\binom{m}{n}$ verschiedene Gruppen ε_i und a_{ik} aufstellen. Ist $m<n$, so kann die in Rede stehende Transformation nur an m Gleichungen des Systems (5.) vollzogen werden.

Hat man nun für A_{11} bis A_{nn} die entsprechenden proportionalen Ausdrücke berechnet, so gewinnt man auch für die Elemente a_{ik} proportionale Ausdrücke, indem man von dem Determinantensatz

$$a_{ik} = A'_{ik}:D^{n-2}$$

Gebrauch macht, unter A'_{ik} die Adjuncte von A_{ik} in Bezug auf das System $|A_{ik}|$ verstanden.

Bemerkt sei noch, dass auf System (1.) das allgemeinere

$$(7.)\qquad Fv_i^{x+1}+\sum_k f_{ik}v_k^x = 0$$

zurückkommt, in welchem F eine rationale ganze Function

$$F = \prod_\nu (x-\alpha_\nu)^{\beta_\nu}$$

bedeutet. Die hierzu zweckdienliche Substitution ist:

$$(8.)\qquad v_i^x = \frac{y_i^x}{\prod\limits_\nu [\Gamma(x-\alpha_\nu)]^{\beta_\nu}} \qquad (i=1, 2 \ldots n),$$

wo Γ die *Euler*sche Gammafunction bezeichnet. —

Anwendung auf das hypergeometrische System zweiter Klasse:

$$(9.)\qquad \begin{cases} y_1^{x+1}+(a_1+b_1x)y_1^x+(c_1+d_1x)y_2^x = 0, \\ y_2^{x+1}+(a_2+b_2x)y_1^x+(c_2+d_2x)y_2^x = 0. \end{cases}$$

Nach der vorigen Darlegung entsteht hieraus

$$(10.)\qquad \begin{cases} z_1^{x+1}+(x-\varepsilon_1)(\alpha_1 z_1^x+\beta_1 z_2^x) = 0, \\ z_2^{x+1}+(x-\varepsilon_2)(\alpha_2 z_1^x+\beta_2 z_2^x) = 0, \end{cases}$$

wobei ε_1 und ε_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1\varepsilon & c_1+d_1\varepsilon \\ a_2+b_2\varepsilon & c_2+d_2\varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

bedeuten. Setzt man des Weiteren

$$(11.)\qquad z_i^x = (x-\varepsilon_i-1)v_i^x \qquad (i=1, 2),$$

so gelangt man zu

$$(12.)\qquad \begin{cases} v_1^{x+1}+\alpha_1(x-\varepsilon_1-1)v_1^x+\beta_1(x-\varepsilon_2-1)v_2^x = 0, \\ v_2^{x+1}+\alpha_2(x-\varepsilon_1-1)v_1^x+\beta_2(x-\varepsilon_2-1)v_2^x = 0, \end{cases}$$

d. h. aber: Ein lineares Differenzengleichungssystem, in welchem die Reihen der z_k^x mit einem Factor $x-\varepsilon_i$ behaftet sind, kann in ein solches umgesetzt werden, in welchem die Colonnen der v_i^x mit einem Factor $x-\varepsilon_i-1$ behaftet sind. — Diese Bemerkung gilt offenbar auch für ein System mit n Gleichungen, und was im Besonderen das hypergeometrische System (12.) anlangt, so gewährt sie hier einen praktischen Nutzen. Denn gerade die Gleichungen (12.) sind es, welche nach Elimination einer der abhängigen Veränderlichen v_1^x oder v_2^x unmittelbar auf eine Differenzengleichung der Form

$$A_2 v^{x+2}+(A_1+B_1x)v^{x+1}+(A_0+B_0x+C_0x^2)v^x = 0$$

führen, welche letztere durch die *Gauss*sche hypergeometrische Reihe vollständig integrirt werden kann.

II.

Zwei Sätze über die Determinanten der Integrale von linearen Differenzengleichungen.

A.) Es seien y_i^x $(i=1, 2, \ldots, n)$ die particulären Integrale einer linearen Differenzengleichung $n$ter Ordnung

$$(1.)\qquad f(y) = y^{x+n}+p_{n-1}y^{x+n-1}+\cdots+p_1y^{x+1}+p_0y^x = 0,$$

und man bezeichne die Determinante

$$\begin{vmatrix} y_1^{x+n-1} & \cdots & y_1^x \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ y_n^{x+n-1} & \cdots & y_n^x \end{vmatrix}$$

mit D^x, dann bestimmt sich letztere durch die lineare Differenzengleichung erster Ordnung

$$(2.) \qquad D^{x+1} = (-1)^n p_0 D^x.$$

Dieser Satz folgt unmittelbar durch Elimination der Coefficienten p_{n-1} bis p_1 aus den n Gleichungen

$$f(y_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

und er ist das einfache Analogon des *Abel-Liouville*schen Satzes für lineare Differentialgleichungen.

Hieraus darf man aber nicht schliessen, dass der eine Satz den anderen überflüssig mache. Es giebt Functionen *einer* Veränderlichen, die durchaus keiner algebraischen Differentialgleichung genügen, wohl aber einer algebraischen Differenzengleichung und umgekehrt. Auf solche Functionen wird sich eben entweder nur der erste oder nur der zweite Satz anwenden lassen. — So genügt beispielsweise die Gammafunction einer sehr einfachen Differenzengleichung, während sie, wie Herr *Weierstrass* bemerkt hat, nie das Integral einer algebraischen Differentialgleichung sein kann*). Auf diese Function würde also gerade unser Determinantensatz passen, und wir wollen daher auf diesen Fall kurz eingehen.

Wir gehen von der Differenzengleichung

$$y^{x+n} - \frac{x}{n} y^x = 0$$

aus, deren particuläre Integrale die Gestalt

$$y_i^x = \varepsilon_i^x \Gamma\left(\frac{x}{n}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

haben, wobei ε_1 bis ε_n die Wurzeln der Gleichung $\varepsilon^n = 1$ bedeuten. Bilden wir die mit D^x bezeichnete Determinante, so enthalten alle Elemente von ein und derselben Colonne die gleiche Gammafunction, und es ergiebt sich leicht:

---

*) Vergl. die Abhandlung „Ueber die Eigenschaft der Gammafunction, keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen" von *O. Hölder*. Math. Annalen Bd. XXVIII.

$$D^x = (-1)^{(n-1)x}\varkappa\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right),$$

$$\varkappa = (-1)^{\frac{1}{4}(n-1)(n-2)}n^{\frac{n}{2}}.$$

Andererseits hat man nach (2.)

$$D^{x+1} = (-1)^{n-1}\frac{x}{n}D^x,$$

also

$$D^x = (-1)^{(n-1)x}Kn^{-x}\Gamma(x),$$

unter K eine willkürliche periodische Constante verstanden.

Setzt man $x = nz$ und vergleicht die beiden für D^x gefundenen Ausdrücke, dann gelangt man zu dem bekannten *Legendre-Gauss*schen Theorem

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = cn^{-nz}\Gamma(nz),$$

wobei noch die Constante c in der gewohnten Weise zu bestimmen wäre und den Werth $n^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ erhält.

Eine andere Anwendung würde die sein, dass man eine der *Gauss*schen totalen Differenzengleichungen zweiter Ordnung für die hypergeometrische Reihe herausgreift und mittelst ihrer beiden Particularlösungen die Determinante D^x bildet und näher bestimmt, wodurch man sehr leicht auf gewisse für die hypergeometrischen Functionen charakteristische Formeln kommt. Indessen gilt hier im Gegensatz zu der vorigen Anwendung, dass diese Formeln auch mit Hülfe des *Abel*schen Determinantensatzes gefunden werden können, weil die hypergeometrische Reihe bezüglich des vierten Elements einer Differentialgleichung genügt*).

B.) Es sei

$$(3.)\qquad y_i^x = \sum_k c_k y_{ik}^x \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

das vollständige Integralsystem eines Systems linearer simultaner Differenzengleichungen

$$(4.)\qquad y_i^{x+1} + \sum_k p_{ik} y_k^x = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

und man bezeichne die Determinante $|y_{ik}^x|$ mit D^x, dann bestimmt sich letztere durch die lineare Differenzengleichung erster Ordnung

$$(5.)\qquad D^{x+1} = (-1)^n |p_{ik}| D^x \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

---

*) *Abel.* „Sur quelques intégrales définies". Dieses Journal Bd. II.

Dieser Satz*) folgt unmittelbar, wenn man in

$$D^{x+1} = |y_{ik}^{x+1}|$$

die n^2 Substitutionen

$$y_{ik}^{x+1} = -\sum_j p_{ij} y_{jk}^x \qquad (j, i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

welche infolge der Gleichungen (4.) vorhanden sind, einführt, denn dann erhält man nach der Multiplicationsregel der Determinanten

$$D^{x+1} = (-1)^n |p_{ik}| . |y_{ik}^x|,$$

d. h. die Gleichung (5.).

---

*) Den analogen Satz für ein System linearer Differentialgleichungen hat Verf. in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. Jahrg. XXX aufgestellt.

unter den Curven $a_\mu, a_\nu, \ldots, a_\sigma$ befindet. Ist dies aber nicht der Fall, so folgt aus I, da einerseits b_2, b_1, a_1, andererseits $b_2, a_\mu, a_\nu, \ldots, a_\sigma$ eine vollständige Begrenzung bilden, dass auch b_1 mit $a_1, a_\mu, a_\nu, \ldots, a_\sigma$ dies thut und demnach b_1 die Curve a_1 im Curvensystem von F ersetzen darf. Nun besitzen b_1 und b_2 zusammen zwei Schnittpunkte weniger mit q wie a_1, diese Curve kann somit in allen Fällen durch eine andere ersetzt werden, welche q in mindestens zwei Punkten weniger trifft wie sie selbst.

Durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens erhält man offenbar auf F ein System geschlossener Curven, deren keine den beliebig gezogenen Querschnitt in mehr als einem Punkte schneidet.

Sind nun in diesem System noch mehrere Curven vorhanden, welche q schneiden, so lassen sich durch ein dem eben angewandten völlig analoges Verfahren diese alle *bis auf eine einzige* durch andere Curven ersetzen, welche q nicht mehr schneiden. Man kann demnach, wenn in F ein beliebiger Querschnitt q gezogen wird, das Curvensystem für diese Fläche stets so wählen, dass entweder

1) keine seiner Curven q trifft, oder

2) nur eine seiner Curven und diese nur in einem einzigen Punkte q schneidet.

Daraus folgt unmittelbar, dass im ersten Fall der Querschnitt die Fläche F zerstückt und die Zusammenhangszahl des Flächensystems um eine Einheit erhöht, dass dagegen im zweiten Fall der Querschnitt die Fläche F nicht zerstückt und die Zusammenhangszahl des Systems um eine Einheit erniedrigt.

Wenn nun ein aus k Flächen bestehendes Flächensystem durch ν Querschnitte in ϱ einfach zusammenhängende Flächen zerlegt wird, so müssen offenbar $\varrho-k$ dieser Querschnitte Flächen des Systems zerstücken, während die übrigen $\nu-(\varrho-k)$ Querschnitte dies nicht thun. Die Zusammenhangszahl ϱ des Flächensystems nach der Zerschneidung wird demnach, wenn sie vorher gleich n war, gleich $n+(\varrho-k)-(\nu-\varrho+k)$, es ist somit

$$\nu-\varrho = n-2k$$

und daher, wenn dasselbe Flächensystem ein anderes Mal durch ν' Querschnitte in ϱ' einfach zusammenhängende Flächen zerlegt wird:

$$\nu'-\varrho' = \nu-\varrho,$$

w. z. b. w.

Ueber die Grundlagen der Geometrie.

(Von Herrn *Wilhelm Killing* in Braunsberg.)

Zu der vorliegenden Abhandlung habe ich bereits früher einige Vorarbeiten herausgegeben, nämlich eine Arbeit, welche im Jahresbericht des Gymnasiums zu Brilon 1880 erschien, und eine zweite, welche dem Verzeichniss der Vorlesungen unseres Lyceums für den Winter 1884/85 vorgedruckt ist. Einzelne Theile dieser Arbeiten sind, jedoch nicht ohne durchgreifende Aenderungen, in die vorliegende Arbeit aufgenommen; aber der grösste Theil, namentlich die letzten Paragraphen, ist ganz neu.

Dass die Geometrie gewisse Sätze unbewiesen voraussetzen und darauf den Beweis für ihre weiteren Sätze stützen müsse, ist von je her anerkannt. Aber ganz Entsprechendes gilt für die Begriffe. Die Bildung von Begriffen geschieht in der Geometrie durch Definitionen, deren Wesen darin besteht, mehrere Begriffe zu einem einzigen neuen zu verbinden. Daraus folgt, dass auch die Bildung von Definitionen einmal ihre Grenze findet, und dass gewisse Begriffe, ohne selbst definirt werden zu können, allen Definitionen zugrunde liegen; sie mögen als Grundbegriffe der Geometrie bezeichnet werden. Damit dieser Name einem System von Begriffen beigelegt werden kann, hat dasselbe somit drei Bedingungen zu genügen: erstens muss jeder dieser Begriffe für die Geometrie nothwendig sein, zweitens muss das System nicht auf eine geringere Zahl zurückgeführt werden können, und drittens zur Gewinnung aller geometrischen Begriffe ausreichen.

Mit der Aufstellung der Grundbegriffe ist aber die Möglichkeit von Definitionen keineswegs gegeben. Bevor man mehrere Begriffe in einer Definition zusammenstellt, muss die Möglichkeit erkannt sein, sie überhaupt zu verbinden, und weil die Verbindung einen neuen Begriff ergeben soll, darf die Verbindung nicht nothwendig sein. Ferner kann in vielen Fällen eine Definition nicht unmittelbar in voller Allgemeinheit aufgestellt werden, sondern benutzt einen Hülfsbegriff, der, wenigstens scheinbar, speciellen

Charakter hat; in diesen Fällen ist es nöthig, nachzuweisen, dass der neue Begriff wirklich allgemeine Gültigkeit besitzt. So erkennen wir, dass jede Definition bereits gewisse Urtheile voraussetzt. Diejenigen Urtheile (Sätze), welche nicht durch Beweise auf andere zurückführbar sind, bilden somit die Grundlage für die Definitionen und für die weiteren Urtheile; es möge gestattet sein, sie als Grundsätze der Geometrie zu bezeichnen.

Bei der grossen Verschiedenheit der Ansichten, welche über die ersten Begriffe der Geometrie herrschen, habe ich es für nöthig gehalten, bei Aufstellung der Grundbegriffe meine Anschauung näher zu begründen und möglichen Missverständnissen thunlichst vorzubeugen, wobei ich mit dem Geständniss nicht zurückhalten will, dass ich die Berechtigung der von mir aufgestellten Grundbegriffe und Grundsätze hauptsächlich in dem Umstande erblicke, dass mit ihrer Hülfe ein consequenter Aufbau der Geometrie möglich ist. Zugleich verhehle ich mir aber nicht, dass jetzt nothwendigerweise eine zweite Aufgabe an uns herantritt, nämlich tiefer auf die innere Berechtigung dieser Begriffe und Urtheile einzugehen. Diese Aufgabe, welche immer erst einen späteren Platz einnehmen kann, dürfte weniger der Mathematik angehören. Von dem philosophischen Gebiete habe ich aber geglaubt, mich ganz fernhalten zu sollen, so interessant es sicherlich gewesen wäre, wenigstens einige Ausblicke anzubringen.

Wenn ich auch in § 2 alle Grundsätze unmittelbar neben einander stelle, so würde ich es doch für angemessener erachtet haben, die einzelnen für sich in ihren Consequenzen soweit zu verfolgen, bis sich die Hinzunahme weiterer als nothwendig erweist. Hieran hinderte mich jedoch die Absicht, die Darlegung nicht breiter werden zu lassen, als bereits jetzt nothwendig war. Bei grundlegenden Arbeiten wird eine gewisse Breite nicht zu umgehen sein. Bei Herleitung der Begriffe schien mir eine peinliche Ausführlichkeit angebracht; bei einigen Beweisen glaubte ich aber, es mit kurzen Andeutungen bewenden lassen zu können, um nicht gar zu weitläufig zu werden.

Die ersten neun Paragraphen beschäftigen sich nur mit denjenigen Folgerungen, welche sich aus den sieben ersten Grundsätzen ergeben, und gelangen zu der überaus merkwürdigen Thatsache, dass das hierdurch bestimmte Wissensgebiet wesentlich identisch ist mit einer fest begrenzten analytischen Theorie, nämlich der der endlichen transitiven Transformationsgruppen. Sollte man einen Mangel darin finden wollen, dass man nicht

unmittelbar die intransitiven Gruppen mit erhält, so möge man nur berücksichtigen, dass die intransitiven Gruppen eben nicht in sich abgeschlossen sind und ein über die Gruppe hinausgehendes Grössengebiet voraussetzen. Andererseits führt aber die Theorie der transitiven Gruppen durch die in ihnen enthaltenen Untergruppen auf die intransitiven Gruppen, so dass letztere auch bei unserem Ausgangspunkte nicht ausgeschlossen sind.

Gleichwie es ausserordentlich viele verschiedene transitive Gruppen giebt, so kann man auch ganz verschiedene in sich abgeschlossene Systeme aufstellen, welche den angegebenen Grundsätzen genügen. Alle diese zeigen, wie sie auf derselben Grundlage ruhen, in ihrem Aufbau wesentliche Uebereinstimmung. Sie müssen demnach als Zweige einer einzigen Wissenschaft bezeichnet werden, und es wird passend sein, dieser einen eigenen Namen zu geben. Es liegt aber nichts näher, als diese Wissenschaft eine „verallgemeinerte Geometrie" zu nennen und ihren Zweigen den Namen „Raumformen im allgemeinen Sinne" beizulegen, im Gegensatz zu den „eigentlichen Raumformen", welche durch den Grundsatz VIII bestimmt werden und für den Fall dreier Dimensionen unserer Erfahrung genügen.

Es dürfte überhaupt fraglich sein, ob der letzte Grundsatz mit den übrigen ganz auf dieselbe Stufe gestellt werden kann. Nach demselben soll bei der Ruhe eines Punktes weder ein zweiter jede beliebige Lage annehmen können, noch soll ein durch den ruhenden Punkt gehendes Gebilde nothwendig bei der Ruhe des Punktes in sich verbleiben. Während die übrigen Grundsätze ganz allgemein vorausgesetzt werden müssen, darf hier die postulirte Eigenschaft nur für einen einzigen Punkt angenommen werden und folgt dann für jeden andern. Somit begründet auch dieser Grundsatz nur eine gewisse Abtheilung in einem grösseren Gebiete.

Für meine Ueberzeugung, dass die Geometrie im engeren Sinne nur als kleiner Theil in einem allgemeinen Wissens-Gebiete aufgefasst werden muss, spricht auch folgender Umstand. Wenn man, in Verfolgung eines *Plücker*schen Gedankens, in einer eigentlichen Raumform eine gerade Linie, eine Ebene oder überhaupt ein Gebilde, welches bei allen Transformationen einer Untergruppe in sich verbleibt, als Element einer Raumform auffasst, so gelangt man im tiefsten Grunde nur zu einer andern Behandlung derselben Raumform; auch zeigt das System, zu dem man auf diese Weise geführt wird, stets die Eigenschaften einer verallgemeinerten, aber nur in

den seltensten Fällen die einer eigentlichen Raumform. So wird man durch eine ganz einfache Operation, welche an einer eigentlichen Raumform ausgeführt wird, auf die allgemeineren geführt.

Endlich darf ich wohl zur Stütze meiner Ansicht auf eine zweidimensionale Raumform aufmerksam machen, welche ich in § 13 näher charakterisirt habe, und welche mit meinem achten Grundsatze vielleicht noch vereinbar ist. In derselben wird der Kreis durch eine gewisse Spirale ersetzt. Herr *von Helmholtz*, der, ohne ihre Gleichungen aufzustellen, sie genau beschreibt, schliesst sie durch das Postulat aus, dass bei der Ruhe eines Punktes ein zweiter sich in einer geschlossenen Linie bewege. Beschränken wir uns aber auf Erfahrungen, bei denen nur Bewegungen in einer Ebene benutzt werden, so lässt sich die Unmöglichkeit einer solchen Raumform nicht erweisen; für den mehrdimensionalen Raum wird sie allerdings von selbst ausgeschlossen.

Bei der engen Beziehung, welche zwischen den verallgemeinerten Raumformen und den Transformations-Gruppen stattfindet, erachte ich es für nothwendig, auf die kleinen zwischen beiden Theorien bestehenden Unterschiede hinzuweisen. Der eine beruht darin, dass in der Gruppe complexe Werthe der Variabeln mit den reellen gleich berechtigt sind, in der Raumform aber nicht, und dass infolge dessen zwei Gruppen als wesentlich identisch (ähnlich) zu betrachten sind, wenn sie auch durch eine imaginäre Transformation in einander umgewandelt werden, während die entsprechenden Raumformen wesentliche Verschiedenheiten zeigen. Ein zweiter Unterschied ist der, dass zu derselben Gruppe mehrere Raumformen gehören können. Es giebt nämlich Fälle, in denen einem Punkte sowohl je ein einziges als auch mehrere Werthsysteme der Variabeln beigeordnet werden können. Ich erinnere an die beiden Raumformen positiver constanter Krümmung, welche für jede Zahl von Dimensionen möglich sind (dieses Journal Bd. 83 S. 72).

In § 9 habe ich einen Ueberblick über die Theorie der Transformations-Gruppen gegeben. Dabei musste ich vor allem solche Partieen berücksichtigen, welche in den folgenden Paragraphen Anwendung finden oder doch geeignet sind, das Verständniss der darin benutzten Beweise zu erleichtern. Angaben darüber, wo der einzelne Satz zuerst aufgestellt sei, oder wo man seinen einfachsten Beweis finde, habe ich ganz ausgeschlossen. Die Litteratur auf diesem Gebiete ist ja noch ziemlich klein. Für § 9

kommt es vor allem auf den ersten Band der „Transformations-Gruppen" des Herrn *Lie* (Leipzig 1888) an; daneben vergleiche man eine Arbeit des Herrn *Schur* im 35. Bande der Annalen und endlich meine eigenen Arbeiten, namentlich diejenigen, welche in den Bänden 31—36 der Annalen veröffentlicht sind. Wenn ich mich in § 8 bei Entwicklung des Begriffs der Transformations-Gruppen recht eng an Herrn *Lie* angeschlossen habe, so leitete mich vor allem das Bestreben, die volle Uebereinstimmung um so deutlicher hervortreten zu lassen. Auch hätte ich in § 10 erwähnen können, dass Herr *Lie* bereits mehrfach die lineare Gruppe in Betracht gezogen hat, durch welche die Bewegung der einem festen Punkte unendlich nahen Punkte bestimmt wird.

Die vier letzten Paragraphen sind den eigentlichen Raumformen gewidmet. Wie Herr *von Helmholtz* von gewissen Eigenschaften der Bewegung ausgeht und dadurch zuerst auf die wahre Grundlage der Geometrie hingewiesen hat, setze auch ich Eigenschaften der Bewegung voraus, und zwar betrachte ich ebenfalls die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt. Meine Voraussetzung führt mich dann auf eine Invariante zwischen den Coordinaten zweier Punkte, also auf eine Abstandsfunction im Sinne des Herrn *Weierstrass*. Indem ich die beiden Punkte unendlich nahe an einander rücken lasse, vertritt die Invariante *Riemanns* Ausdruck für das Quadrat des Bogenelementes, und ich weise nach, dass derselbe in den Differentialen homogen linear vom zweiten Grade ist. Denselben behandle ich in zweifacher Weise, einmal im Anschluss und unter Benutzung der Untersuchungen, welche in diesem Journal von den Herren *Christoffel* (Bd. 70) und *Lipschitz* (Bd. 70—72) angestellt worden sind. Endlich wende ich die Theorie der Transformations-Gruppen an und gelange dadurch zu einer recht einfachen und elementaren Herleitung der eigentlichen Raumformen.

Zum Schluss sei noch folgende Bemerkung gestattet: Bei den eigentlichen Raumformen tritt die wichtige Erscheinung auf, dass niemals ein Körper oder ein Grenzgebilde mit einem seiner Theile zur Deckung gebracht werden kann. Bei meinem Grundsatz VIII (und ebenso bei den Voraussetzungen des Herrn *von Helmholtz*) stellt sich diese Thatsache als ein Lehrsatz dar, der bewiesen werden kann. Man kann auch versuchen, diese Eigenschaft zur Grundlage zu wählen; nur muss man sie dann nicht bloss für Körper, sondern auch für sämmtliche Grenzgebilde machen. Ob es dann gelingt, die Bewegung ganz zu entbehren, kann ich noch nicht

übersehen; jedenfalls würde die Durchführung grosse Schwierigkeiten bieten. Auch hieraus geht hervor, dass es in der Geometrie besonders auf Lagenbeziehungen ankommt, und dass Grössensätze immer erst die zweite Stelle einnehmen.

§ 1.

Grundbegriffe.

Als Grundbegriffe der Geometrie stellen wir folgende auf:

Feste Körper, Theile eines Körpers, Raum, Theile eines Raumes, einen Raum einnehmen (decken), Zeit, Ruhe, Bewegung.

Die Alten glaubten bekanntlich, die Bewegung sei der Geometrie fremd, und sie machten infolge dessen die grössten Anstrengungen, auch aus den geometrischen Beweisen den Gebrauch der Bewegung ganz zu verbannen. Aber es ist ihnen keineswegs gelungen, ohne Bewegung auszukommen. Wenn *Euklid* die Congruenzsätze des Dreiecks und manche Sätze über den Kreis beweist, so benutzt er die Bewegung ganz offenkundig; selbst der Gebrauch des Zirkels in denjenigen Constructions-Aufgaben, welche als Existenzbeweise dienen, kommt meistens auf Bewegung hinaus; endlich ist in sehr vielen Fällen, wo *Euklid* seine Grössensätze benutzt, der tiefere Grund in der Bewegung zu suchen. Sobald aber ein Satz, dessen Beweis unter Anwendung der Bewegung geführt wird, beim Beweise eines anderen Satzes benutzt wird, stützt sich auch der letztere auf Bewegung; daraus, dass mancher Beweis nur die Congruenzsätze der Dreiecke in Anwendung bringt, darf daher keineswegs gefolgert werden, dass für denselben die Bewegung überflüssig sei. Vielmehr wird man zugeben müssen, dass die directe Anwendung der Bewegung in sehr vielen Fällen die Beweise einfacher, natürlicher und übersichtlicher macht. Könnte die Bewegung in der Geometrie wirklich entbehrt werden, so würden die Versuche der Alten ganz gewiss einen besseren Erfolg gehabt haben.

In neuerer Zeit sagt man vielfach, es komme nicht auf die Bewegung der Körper, sondern auf die Vergleichung verschiedener Raumtheile an. Dieser Gedanke liegt um so näher, da grossartige Fortschritte, welche die Geometrie in letzter Zeit gemacht hat, gerade dadurch herbeigeführt worden sind, dass man die Vergleichung in der verschiedensten Weise zugelassen hat. Man übersieht aber hierbei, dass die verschiedenen Arten der Vergleichung einer gesonderten Herleitung bedürfen, und dass sich alle aus der Congruenz herleiten lassen. Auch kommt es der Geometrie an und für

sich nur auf die begrifflichen Operationen an, und es ist ihr gleichgültig, welche Vorstellungen mit den Begriffen verbunden werden. Man darf daher ohne Zweifel eine gewisse Vergleichung von Raumtheilen an die Spitze der Geometrie stellen; aber diese Vergleichung muss identisch sein mit derjenigen, welche durch die Bewegung von starren Körpern vermittelt wird. Indessen gelangt der Geist zu der Vergleichung von Raumtheilen zunächst durch die Bewegung fester Körper; dann erst wird dieselbe durch die Benutzung von Auge und Hand (also im wesentlichen auch durch Bewegung) vermittelt; und wenn schliesslich auch hiervon Abstand genommen wird, so recurrirt man wenigstens indirect auf die angegebenen Hülfsmittel. Schon aus diesem Grunde ist es am natürlichsten, den festen Körper als Grundbegriff für die Geometrie beizubehalten. Man versuche es nur einmal, die grundlegenden Sätze ohne Benutzung des Begriffs von festen Körpern auszusprechen, und man wird erkennen, wie schwierig dies ist, und wie sehr die Natürlichkeit darunter leidet.

Mit der Bewegung ist ihr Gegensatz, die Ruhe, mitverlangt; dann kann aber der Begriff der Zeit nicht entbehrt werden. Die Nothwendigkeit der Theilung ist von je her anerkannt.

Dabei müssen wir jedoch zugestehen, dass einige dieser Begriffe mehr den Charakter von Hülfsbegriffen haben. Das gilt vor allem von der Zeit, betreffs deren für die Geometrie nur das „zugleich, vorher und nachher“ nicht entbehrt werden kann. Auch der feste Körper wird nicht an sich gebraucht, sondern nur insofern, als mit seiner Hülfe weitere Begriffe hergeleitet werden.

Wir können uns nicht mit dem Nachweis befassen, dass es unmöglich ist, die angegebenen Begriffe auf eine geringere Zahl zurückzuführen. Wenn man die bisher gemachten Versuche, Definitionen von den aufgestellten Begriffen zu liefern, irgend genauer ansieht, so wird man sicherlich zu der Ueberzeugung gelangen, dass es sich nur um Erläuterung, nicht um eine strenge Definition handelt. Wenn z. B. ein fester Körper als ein solcher definirt wird, für welchen die Grösse und die Gestalt ungeändert bleiben, so treten an die Stelle des einen Grundbegriffs „fester Körper“ zwei neue, nämlich „Grösse“ und „Gestalt eines Körpers“, deren Erläuterung noch mehr Mühe macht, als die des ursprünglich gegebenen Begriffs.

Somit bedarf es nur noch des Nachweises, dass die aufgestellten Begriffe für die Geometrie genügen, und dieser Nachweis kann nur durch den wirklichen Aufbau geführt werden.

§ 2.

Grundsätze der Geometrie.

Die Ausdehnung und die Undurchdringlichkeit der Körper müssen auch in der Geometrie an erster Stelle genannt werden; wir fassen sie zu einem Grundsatz zusammen.

I. *Jeder Körper nimmt zu jeder Zeit einen Raum ein; den von einem Körper eingenommenen Raum kann nicht gleichzeitig ein zweiter Körper decken.*

Die Geometrie bedarf der unbegrenzten Theilung eines jeden Körpers. Aber die geometrische Theilung ist von der mechanischen wesentlich verschieden, indem letztere die Theile von einander trennt, während bei der geometrischen Theilung die Theile als dem Ganzen anhaftend gedacht werden können. Wenn z. B. zwei Lagen desselben Körpers einen Raumtheil gemeinschaftlich haben, in einem andern aber nicht übereinstimmen, so ist dadurch geometrisch eine Theilung des Körpers ausgeführt; man unterscheidet denjenigen Theil des Körpers, dessen zweite Lage von dem Körper in der ersten Lage noch mit eingenommen wurde, von demjenigen Theile, dessen zweite Lage der ersten Lage des Körpers nicht angehört. Demnach ist die Forderung einer unbegrenzten geometrischen Theilung mit der physikalischen Annahme von Molekeln und Atomen ganz vereinbar.

II. *Jeder Raum (Körper) kann getheilt werden; jeder Theil eines Raumes (Körpers) ist wiederum ein Raum (Körper); ist A ein Theil von B, und B ein Theil von C, so ist auch A ein Theil von C, wo man unter A, B, C sowohl Räume als Körper verstehen kann.*

Die Unabhängigkeit des Raumes von dem ihn einnehmenden Körper führt zu folgendem Grundsatze:

III. *Jeder Körper kann bewegt werden; wenn ein Körper zu irgend einer Zeit den früheren Raum eines zweiten Körpers deckt, so kann er zur Deckung mit jedem Raum gebracht werden, welchen der zweite zu irgend einer Zeit einnimmt.*

Dieser Grundsatz erlaubt die Definition der Congruenz für Räume und für Körper, indem er diesen Begriff von der Zeit, und für Räume von dem benutzten Körper, dagegen für Körper von dem benutzten Raume unabhängig macht So werden wir zwei Räume als congruent bezeichnen, wenn derselbe Körper beide Räume decken kann; ebenso können congruente Körper zur Deckung desselben Raumes gebracht werden. Der von einem Körper eingenommene Raum wird mit Rücksicht auf die Beweglich-

keit des Körpers als seine Lage bezeichnet. Diesem Grundsatz entsprechend, sieht die Geometrie ganz von dem Stoffe der Körper ab; nur in diesem Sinne darf der zuweilen gebrauchte Ausdruck verstanden werden, die Geometrie betrachte den Raum als leer.

IV. *Jeder Körper lässt sich so bewegen, dass ein Theil desselben mit einem Theile eines beliebigen Raumes zur Deckung gelangt.*

M sei der gegebene Raum, etwa bestimmt durch einen Körper m, welcher ihn zu einer bestimmten Zeit eingenommen hat; a sei der bewegte Körper, A der Raum, welchen er nach der in diesem Grundsatz geforderten Bewegung deckt; dann sind vier Fälle möglich: A und M sind vollständig identisch, oder A ist ein Theil von M, oder M ist ein Theil von A, oder viertens A und M haben einen Theil gemeinschaftlich, während ein Theil von A nicht zu M und ein Theil von M nicht zu A gehört. Wenn einer dieser vier Fälle angenommen wird, ohne dass entschieden werden soll, welcher es ist, so möge von theilweiser Deckung gesprochen werden.

A sei eine Lage eines Körpers a, welche mit einem Raume M keinen Theil gemeinschaftlich hat; dagegen soll a auch eine Lage A_1 erhalten können, welche ganz ein Theil von M ist; dann giebt es für denselben Körper a auch eine Lage A' von der Beschaffenheit, dass ein Theil von A' dem Raume M angehört, ein anderer Theil von A' aber nicht; bei jeder Bewegung, welche den Körper a von A nach A_1 überführt, erlangt er eine Lage, wie sie für A' angegeben wurde. Diesem Satz geben wir folgenden Ausspruch:

V. *Wenn ein Körper vor seiner Bewegung keinen Theil mit einem Raume gemeinschaftlich hat, aber nach derselben diesem Raume ganz angehört, so erlangt er bei seiner Bewegung eine Lage, in welcher nur ein Theil von ihm dem Raume angehört.*

Der Raum A sei beliebig in die beiden Theile M und N zerlegt; dann lässt sich immer ein Körper k bestimmen und mit demselben eine Bewegung ausführen, welche folgenden Bedingungen genügt: bei Beginn der Bewegung soll k einen Theil von M, am Ende derselben einen Theil von N decken, und während der Bewegung soll k und jeder Theil von k immer dem Raume A angehören. Dies liefert den Grundsatz:

VI. *Wenn ein (zusammenhängender) Raum A in irgend zwei Theile M und N zerlegt ist, so lässt sich immer ein Körper k bestimmen, welcher so bewegt werden kann, dass während der Bewegung kein Theil des Körpers den*

Raum A verlässt, und k bei Beginn der Bewegung einen Theil von M und am Schluss derselben einen Theil von N deckt.

Wenn ein Raum *A* in zwei Theile *M* und *N* zerlegt ist, so nennen wir diese beiden Theile zusammenhängend. Ueberhaupt bezeichnen wir zwei Räume als zusammenhängend, wenn sie nach dem vorangehenden Grundsatz als die Theile eines einzigen Raumes betrachtet werden können. [Erläuternd möge bemerkt werden, dass hiernach zwei Raumtheile des dreidimensionalen Raumes nur dann als zusammenhängend (einen einzigen Raum bildend) betrachtet werden dürfen, wenn sie in einer Fläche zusammenstossen; dass aber bei Zusammenstoss in einem Punkte oder längs einer Linie dieser Ausdruck nicht gestattet sein soll].

VII. *Sobald ein Theil a eines festen Körpers wieder in eine solche Lage kommt, dass jeder Theil von a in theilweise Deckung mit seiner Anfangslage gelangt, so erhält jeder Theil des Körpers seine Anfangslage wieder.*

Hiernach nimmt der Begriff Lage eine genauere Bedeutung an, als demselben durch den Grundsatz III gegeben wurde. So sind zwei Lagen desselben Körpers nur dann als identisch zu bezeichnen, wenn nicht nur der Körper als Ganzes, sondern auch jeder beliebige Theil desselben beidemal denselben Raum deckt.

Den folgenden Grundsatz sprechen wir zunächst in einer etwas ungenauen Form aus:

Zerlegen wir einen Körper in zwei Theile *m* und *n* und bewegen wir ihn so, dass *m* in theilweiser Deckung mit seiner Anfangslage bleibt, so kann *n* nicht in theilweise Deckung mit jedem Raume gebracht werden; dagegen beschreibt jetzt *n* einen Raumtheil, in dessen Innerem *m* gelegen ist.

Das Wort „Inneres" bedarf noch einer Erläuterung; deshalb sprechen wir den Satz in folgender Form aus:

VIII. *Ein Körper a bestehe aus den beiden Theilen m und n; m decke in der Anfangslage den Raum M. Soll bei einer Bewegung m in theilweiser Deckung mit M bleiben, so kann man immer einen Raumtheil P so bestimmen, dass bei der angegebenen Bewegung n mit demselben nicht in theilweise Deckung gelangen kann. Bewegt man aber einen Körper k so, dass er bei Beginn der Bewegung mit einem solchen Raume P und bei Schluss derselben mit M in theilweiser Deckung ist, so muss er nothwendig bei der Bewegung auch in theilweise Deckung mit einem Raume gelangen, den n bei der*

bezeichneten Bewegung einnehmen kann. Dies gilt für jeden Körper und bei jeder beliebigen Theilung desselben.

Wir haben jetzt nachzuweisen, dass die aufgestellten Grundsätze von einander unabhängig sind. Dass keiner der späteren Grundsätze in einem früheren enthalten ist, ergiebt sich daraus, dass die früheren Sätze auch für solche Vorstellungen gelten, welche mit den folgenden nicht vereinbar sind. „Einen Raum einnehmen" ist verbunden mit dem „Bestehen aus einem Stoffe"; ebenso zerlegt die Theilung eines Körpers auch den Stoff; aber die Möglichkeit, denselben Raum zu decken, erfordert nicht die Gleichartigkeit des Stoffes; daher folgt der Grundsatz III nicht aus den Sätzen I und II. Im zweiten Satze könnte „theilen" durch „zusammenfügen", und „einen Theil bilden" durch „in sich fassen" ersetzt werden; aber diese Vorstellung fällt bei IV weg. Während III und IV nur das Ergebniss einer Bewegung betrachten, stellt V den Verlauf derselben dar, indem ihr die Stetigkeit beigelegt wird. Alle diese Sätze bleiben bestehen, wenn man einen einzelnen Körper durch eine Zusammenstellung mehrerer Körper und einen Raum durch eine Zusammenstellung getrennter Räume ersetzt, eine Vorstellung, welche durch VI ausgeschlossen wird. Ebenso kann man mit den sechs ersten Sätzen die Vorstellung von flüssigen und luftförmigen Körpern verbinden; erst VII fügt die feste Verbindung der einzelnen Theile hinzu. Dass aber dann auch der Grundsatz VIII nicht überflüssig ist, sondern erst die Begriffe von Grösse und Gestalt liefert, wird die weiter folgende Darlegung recht deutlich hervortreten lassen. Umgekehrt sieht man aber auch, dass die vorangehenden Sätze nicht durch spätere überflüssig gemacht werden. Ich will den Nachweis nicht im Einzelnen durchführen, sondern nur bemerken, dass die späteren Sätze fast immer einen von den früheren bereits voraussetzen, also über den Inhalt der früheren hinausgehen.

Den Nachweis dafür, dass die aufgestellten Sätze für die Geometrie nothwendig, aber auch hinreichend sind, muss die folgende Entwicklung liefern.

§ 3.

Unabhängigkeit der Untersuchung von dem benutzten Körper.

Als einen einzigen Raum können wir zunächst den von einem einzigen Körper gedeckten Raum ansehen; wir können aber auch alle Lagen zusammenfassen, welche ein Körper während irgend einer Bewegung erlangt.

Das erkennt man in folgender Weise: Sind A und M irgend zwei Lagen desselben Körpers a, so kann man von den Lagen, welche a bei der von A nach M führenden Bewegung erlangt, eine solche Reihe auswählen, dass jede derselben mit der vorangehenden und nachfolgenden einen Theil gemeinschaftlich hat; sind diese Lagen $B, C, D, E, \ldots$, so soll B mit A und C, C mit B und D, D mit C und E je einen Theil gemeinschaftlich haben. Dem neu betrachteten Theile S soll jeder Raum $A, B, C, \ldots M$ angehören; aber man sieht davon ab, dass ein gewisser Theil von A auch B und ein gewisser Theil von B auch C angehört u. s. w. Jeder Raum A', welchen a bei der betrachteten Bewegung einmal einnimmt, soll ein Theil von S sein; überhaupt soll ein Raumtheil R dem Raume S angehören, wenn jeder Theil von R mit dem Körper a während dessen Bewegung in theilweise Deckung gelangt. Dann erkennt man unmittelbar, dass auch für den Raum S die oben angegebenen Gesetze gelten.

Den hier angegebenen Process kann man aber unbegrenzt fortsetzen. Man betrachte eine zweite Bewegung, welche den Körper a aus der früheren Anfangslage A nach irgend einer andern Lage M' führt. Schliesslich darf man die Zusammenfassung aller Lagen, welche ein Körper überhaupt erlangen kann, als Raum bezeichnen. Eine leichte Anwendung der aufgestellten Grundsätze zeigt, dass es durchaus gleichgültig ist, von welchem Körper und von welcher Lage desselben man ausgeht; die Forderung, den angegebenen Process unbegrenzt fortzusetzen und die Vereinigung der gedeckten Räume als „den Raum" im absoluten Sinne zu bezeichnen, macht uns von den angegebenen Besonderheiten unabhängig. Wenn das Wort Raum in diesem Sinne gebraucht wird, so bezeichnet man den von irgend einem Körper zu einer bestimmten Zeit eingenommenen Raum als Raumtheil.

Auch für die Bewegung kann man sich von dem benutzten Körper unabhängig machen. Es seien a und b irgend zwei Theile desselben festen Körpers. Für a seien zwei Lagen A und A' vollständig bestimmt in dem beim Grundsatz VII angegebenen Sinne, dass auch für jeden Theil von a sowohl die erste wie die zweite Lage angegeben ist. Da b demselben festen Körper angehört, ist hierdurch (nach VII) auch für b sowohl die erste als die zweite Lage vollständig bestimmt. Jetzt gebe ich irgend einem Theile b' dieses Körpers die Lage B oder lasse ihn auch nur einen Theil von B einnehmen; dann erlangt ein weiterer Theil c zugleich eine festbestimmte Lage C. Bringe ich jetzt b' in die Lage B', so wird auch c eine ganz

bestimmte Lage C' annehmen. Den Räumen A, B, C (und jedem Theile derselben) sind jetzt die Räume A', B', C' (und entsprechende ihrer Theile) so zugeordnet, dass, wenn Theile desselben festen Körpers in der ersten Lage je die Räume A, B, C decken, dieselben Theile in der zweiten Lage je die A', B', C' einnehmen. Die hier gefundene Zuordnung der Räume C und C' ist aber unabhängig von der im vorliegenden Falle benutzten Einschiebung von B und B'; man würde zu C denselben Raumtheil C' zuordnen, wenn man andere Zwischenglieder gewählt hätte. Indem man in gleicher Weise weitergeht, muss es möglich sein, zu jedem beliebigen Raumtheil M zu gelangen und diesem einen ganz bestimmten anderen Raumtheil M' zuzuordnen. Die Art dieser Zuordnung ist ganz unabhängig von den benutzten Zwischengliedern; wäre man umgekehrt von der Zuordnung von M und M' ausgegangen, so würde man auch für die übrigen Raumtheile zu derselben Zuordnung gelangt sein, speciell hätte man dem A das A' zugeordnet. Wenn ferner ein Theil eines festen Körpers in seiner ersten Lage den Raum M deckt, so giebt es eine zweite Lage, in welcher M' von demselben Theile gedeckt wird, und jedem Raume, welchen irgend ein anderer Theil I dieses Körpers in der ersten Lage deckt, entspricht bei der obigen Zuordnung derjenige Raum, welchen der Theil I in seiner zweiten Lage einnimmt.

Dadurch sind wir von dem bewegten Körper ganz unabhängig geworden: die beiden Lagen des Körpers haben uns eine Zuordnung geliefert, wo jedem Raumtheile ein ganz bestimmter zweiter Theil entspricht. Die Gesetze dieser Zuordnung im Einzelnen anzugeben, wird nicht nöthig sein. Zudem werden wir der Einfachheit wegen im Folgenden bei Herleitung weiterer Gesetze uns auch ferner der Vermittelung von Körpern bedienen; wir brauchen aber nicht mehr ausdrücklich hervorzuheben, dass die Wahl des Körpers für das Resultat ohne Einfluss ist.

Wenn eine Bewegung eines Körpers a gegeben ist, so kann man ihr für jeden andern Körper m eine ganz bestimmte Bewegung zuordnen. Deckt nämlich irgend ein Theil von m in der Anfangslage einen Raum, den ein Theil von a in seiner Anfangslage annimmt (dabei wird vorausgesetzt, dass die Bewegungen nicht gleichzeitig erfolgen), so lasse man diesen Theil von m dieselbe Bewegung machen, welche jener Theil von a gemacht hat; dadurch wird eine bestimmte Bewegung von m angegeben. Wenn aber die Anfangslage von m keinen Theil mit der von a gemeinschaftlich hat, so schalte man gewisse feste Körper ein und bestimme für diese der

Reihe nach die zugeordnete Bewegung. Indem wir anstelle von m immer andere Körper wählen, erhalten wir eine „stetige Folge" (welcher Ausdruck hier nicht näher erklärt werden soll) von Zuordnungen; eine solche bezeichnet man wohl als „Bewegung des Raumes". Dieser Ausdruck ist an sich durchaus unstatthaft, da der Raum im Gegensatz zu den Körpern als unbeweglich vorausgesetzt werden muss. Aber andererseits wird schwerlich jemand in Versuchung kommen, ihn wörtlich zu verstehen; zudem drückt er ganz deutlich aus, dass die Untersuchung von dem bewegten Körper unabhängig ist, und dass für die Folge derjenigen Zuordnungen eines jeden Raumtheiles zu einem bestimmten andern, welche im Vorstehenden entwickelt sind, dieselben Gesetze gelten, wie für die Bewegung starrer Körper. Deshalb wird der Ausdruck „Bewegung des Raumes" unbedenklich angewandt werden dürfen.

Directe Anwendungen von den Ergebnissen dieses Paragraphen werden in den zunächst folgenden Paragraphen zwar nicht gemacht werden; dennoch glaubte ich, die durchgeführten Entwicklungen schon an diese Stelle setzen zu sollen.

§ 4.

Die Grenzgebilde und die Zahl der Dimensionen einer Raumform.

Wenn ein Körper k in theilweiser Deckung mit einem Raume ist, so gilt dasselbe bei jeder Theilung von k mindestens für einen der erhaltenen Theile. Für einen Körper, welcher mit mehreren Räumen in gleichzeitiger theilweiser Deckung ist, untersuchen wir demnach auch nur die Möglichkeit, dass bei beliebiger Zerlegung ein Theil mit denselben Räumen in theilweiser Deckung verbleibt.

Zerlegen wir einen Raum A in zwei Theile B und C, so lässt sich jeder Körper k in gleichzeitige theilweise Deckung mit B und C bringen. Für unsern Zweck genügt es, anzunehmen, dass jeder Theil von k dem Raume A angehört. Sollte das nämlich nicht der Fall sein, so würden wir immerhin erreichen können, dass ein Theil k' von k ganz im Raume A liegt und zugleich in theilweiser Deckung mit B und C ist; in diesem Falle betrachte man anstelle von k nur den genannten Theil k'. Mit diesem Körper nehme man weitere Theilungen vor. Eine solche könnte darin bestehen, dass wir den dem Raume B angehörigen Theil von k als den einen und den dem Raume C angehörigen als den andern Theil be-

trachten. Von dieser ganz besonderen Zerlegung sehen wir vorläufig ab. Bei jeder andern wird man aber mindestens einen Theil erhalten, welcher mit B und C zugleich in theilweiser Deckung ist. Wir sagen in diesem Falle, k liege auf der *Grenze* von B und C.

Von B können wir solche Theile abtrennen, welche nicht mit C zusammenhängen. So sei B in B' und B'' zerlegt, wo B', nicht aber B'' mit C zusammenhängt. Dann muss k in der angegebenen Lage mit B' und C in gleichzeitiger theilweiser Deckung sein. Dasselbe gilt, wenn wir von C einen Theil C'' abtrennen, welcher nicht mit B Zusammenhang besitzt. Ebenso dürfen wir natürlich zu B beliebige Theile hinzufügen, welche nicht mit C zusammenhängen, so dass wir von den gerade gewählten Raumtheilen B und C in mancher Beziehung unabhängig sind.

Wir sind von einem Raume A ausgegangen und haben denselben in zwei Theile B und C zerlegt; von B trennen wir beliebige Theile ab, welche nicht mit C zusammenhängen, und entsprechende Theile trennen wir von C ab. Bei dieser Abtrennung wird der übrigbleibende Theil entweder stets einen einzigen Raum bilden oder in mehrere Räume zerfallen. Im ersteren Falle lassen wir die Grenze aus einem, im letzteren aus mehreren Grenzgebilden bestehen. (BC) stellt demnach ein einziges Grenzgebilde dar, wenn

a) die Räume B und C einen einzigen Raum bilden, und

b) nach Abtrennung solcher Theile von B, welche nicht mit C zusammenhängen, der übrigbleibende Theil stets einen einzigen Raum bildet. Besteht die Grenze aus mehreren Gebilden, so kann man jedes einzelne für sich bestimmen.

Da dieselbe Theilung, welche hier für einen Raum durchgeführt ist, auch bei einem Körper vorgenommen und die Definition der Grenzgebilde hierauf übertragen werden kann, so ergiebt sich die Möglichkeit, von der Bewegung eines Grenzgebildes zu sprechen. Dasselbe gilt auch für die weiteren, im Folgenden zu definirenden Grenzgebilde und soll deshalb bei ihnen nicht wieder erwähnt werden. Auch wollen wir im folgenden Paragraphen manche Definitionen und Lehrsätze nur für den Fall aussprechen, dass die Grenzgebilde durch Theilung eines Raumes erhalten werden, ohne die Veränderungen anzugeben, welche nothwendig sind, wenn man die Grenzgebilde durch Theilung eines Körpers entstanden denkt.

Für ein Grenzgebilde (BC) ergeben sich zwei Fälle: entweder wird jede Theilung von C nur einen einzigen Theil ergeben, welcher mit B

zusammenhängt, oder man kann C so in zwei Theile zerlegen, dass jeder mit B einen zusammenhängenden Raum bildet. Im ersten Falle wird jeder Körper, welcher auf dem Grenzgebilde liegt, in theilweiser Deckung sein mit dem Raume, welchen irgend ein anderer Körper bei einer früheren derartigen Lage eingenommen hat. Durch Bewegung ergiebt sich, dass jeder Raum, in welchen ein Körper durch Bewegung gelangen kann, dieselbe Eigenschaft hat. Wir sind hierdurch zu zwei gleichberechtigten Möglichkeiten geführt; gilt eine derselben für einen speciellen Raumtheil, so muss sie für jeden Theil des Raumes bestehen. Die im vorigen Paragraphen definirte Bedeutung des Wortes Raum im absoluten Sinne lässt also noch mehrere Möglichkeiten zu; wir bezeichnen jede derselben als Raumform und unterscheiden zunächst einfach und mehrfach ausgedehnte Raumformen, Raumformen von einer und von mehreren Dimensionen. Bei einer eindimensionalen Raumform wird, nachdem ein Raumtheil A in zwei Theile B und C zerlegt ist, jede weitere Zerlegung von B nur einen einzigen Raumtheil ergeben, welcher mit C zusammenhängt. (Bei dieser Definition ist allerdings ein specieller Raumtheil A und eine besondere Zerlegung benutzt; aber es zeigt sich sofort, dass dieselbe Eigenschaft für jeden anderen Raumtheil und jede andere Zerlegung gilt.)

Lässt sich, indem man unter (BC) ein einziges Grenzgebilde versteht, B in zwei Theile D und E zerlegen, welche beide mit C zusammenhängen, so wird sowohl (CD) als (CE) ein einziges Grenzgebilde darstellen. Jetzt kann man jeden Körper k so bewegen, dass er in gleichzeitige theilweise Deckung mit allen drei Theilen C, D, E gelangt. Dabei soll derjenige Theil, welcher in C liegt, sowohl mit dem in D wie mit dem in E liegenden zusammenhängen, und dasselbe soll für die in D und E liegenden Theile gelten. Zugleich wird, nachdem k diese Lage erhalten hat, jede beliebige Theilung von k nothwendig mindestens einen Theil ergeben, welcher entweder wieder mit C, D, E in gleichzeitiger Deckung liegt, oder doch mit einem nicht gedeckten Theile in Zusammenhang ist. Bei dieser Lage liegt k auf der Grenze der drei Raumtheile C, D, E. Man trenne von C ein beliebiges Stück ab, welches nicht mit D und E zugleich zusammenhängt (so dass ein mit D allein zusammenhängendes Stück weggelassen werden kann), und verfahre ebenso mit D und E. Der übrigbleibende Theil, für welchen wieder die angegebenen Gesetze gelten, zerlegt sich entweder in mehrere Räume oder bildet immer einen einzigen Raum. Im letzteren Falle

erhalten wir ein einziges, im ersteren mehrere Grenzgebilde. Wenn die Theilung des Raumes A in die drei Räume C, D, E ein einziges Grenzgebilde bestimmt, so fragt es sich, ob sich C in zwei Theile zerlegen lässt, welche beide mit D und E zusammenhängen. Ist das nicht möglich, so ist die Raumform zweifach ausgedehnt; giebt es eine solche Theilung, so erhalten wir eine Grenze und Grenzgebilde von vier Raumtheilen. Ob eine solche Theilung, bei welcher die Zahl der mit einander zusammenhängenden Raumtheile stets um eins vermehrt wird, bei einer Raumform unbegrenzt fortgesetzt werden kann, in welchem Falle wir derselben unendlich viele Dimensionen beilegen müssten, muss dahingestellt bleiben; wir betrachten jedoch im Folgenden nur den Fall, dass dieser Process nach einer endlichen Zahl von Operationen sein Ende erreicht, und können dann die Zahl der Dimensionen in folgender Weise bestimmen.

Wir zerlegen irgend einen Raumtheil in zwei Theile und untersuchen, ob durch Abzweigung solcher Gebiete des einen, welche nicht mit dem andern zusammenhängen, das Gebiet zerfällt; trifft dies ein, so betrachten wir nur ein Gebiet, bei welchem dies nicht der Fall ist; den einen der beiden Theile zerlegen wir wieder so, dass jeder der beiden neuen Theile mit dem andern zusammenhängt, und sehen zu, ob eine Abtrennung solcher Gebiete, in denen kein Zusammenhang aller drei Theile statt hat, zu einer Zerlegung führt; in derselben Weise fahren wir fort, bis eine weitere derartige Theilung unmöglich ist; wenn dies nach n Zerlegungen eintritt, so legen wir der Raumform n Dimensionen bei. Wir können dies kurz in folgender Weise zusammenfassen:

Wenn von $n+1$ Raumtheilen jeder mit jedem andern zusammenhängt und dieser Zusammenhang bestehen bleibt, nachdem man von jedem Theile solche Gebiete beliebig abgezweigt hat, welche mit einem andern nicht zusammenhängen, so bezeichnet man die grösste Zahl n, welche in dieser Hinsicht möglich ist, als die Zahl der Dimensionen.

§ 5.

Definitionen und Sätze über Grenzgebilde.

Um nicht zu weitläufig zu werden, gebe ich die folgenden einfachen Definitionen und Lehrsätze nicht in derjenigen Reihenfolge, in der ihre Natürlichkeit am meisten hervortritt, sondern so, dass die Darlegung auf dem kürzesten Wege möglich ist.

Wenn wieder n die Zahl der Dimensionen für die betrachtete Raumform ist, so ist die Zahl der Zerlegungen, welche zu einem Grenzgebilde führt, höchstens gleich n. Wenn ein Grenzgebilde durch $n-m$ Zerlegungen erhalten wird, so legen wir demselben m Dimensionen bei; ein m-dimensionales Gebilde ist durch $n-m+1$ Raumtheile bestimmt, von denen jeder mit den anderen $n-m$ zusammenhängt, und deren Zusammenhang nicht aufgehoben wird, wenn man von jedem solche Theile abtrennt, welche nicht mit allen andern in Zusammenhang stehen. Das nulldimensionale Grenzgebilde heisst Punkt (oder auch Element), das eindimensionale Linie, das zweidimensionale Fläche.

Wenn ein Grenzgebilde durch $n-m$ Theilungen erhalten ist, und diese Theile sind M_0, M_1, ... M_{n-m}, so kann man für $m > 0$ den Theil M_0 so in zwei Theile M_0' und M_0'' zerlegen, dass sowohl M_0' wie M_0'' mit allen Theilen M_1, ... M_{n-m} in Zusammenhang stehen. Wäre nämlich für M_0 eine solche Theilung unmöglich, so erhielten wir einen $(n-m)$-dimensionalen Raum, was wir ausgeschlossen haben. Daraus folgen die weiteren Definitionen und Lehrsätze:

„Zwei Grenzgebilde sind identisch, wenn jeder Körper, welcher auf dem einen liegt, auch auf dem andern liegt; solche besitzen stets gleich viele Dimensionen.“

„Ein Grenzgebilde ist ein Theil eines zweiten, wenn beide gleich viel Dimensionen besitzen und jeder Körper, welcher auf dem ersten liegt, auch auf dem zweiten liegt, aber Körper auf dem zweiten liegen können, welche dem ersten fremd sind.“

„Der Punkt ist untheilbar, dagegen kann jede Linie, Fläche und jedes mehrdimensionale Gebilde getheilt werden.“

„Zwei Grenzgebilde α und β bilden ein drittes γ (sind die Theile von γ), wenn jeder Körper, welcher zu γ gehört, entweder in α oder in β liegt, aber von jedem Körper, welcher zugleich den beiden Gebilden α und β angehört, ein Theil nur auf α und ein anderer nur auf β liegt.“

„Zerfällt ein (einziges) Grenzgebilde γ in zwei Theile α und β, so soll jeder Körper, welcher sowohl in α als in β liegt, als der Grenze beider angehörig betrachtet werden. Für die gegenseitige Grenze zweier solcher Gebilde kann wieder dieselbe Betrachtung angestellt werden, wie oben für die Theilung des Raumes, und man gelangt auch auf diesem Wege zu Grenzgebilden.“

„Wenn ein m-dimensionales Gebilde $(0 < m < n)$ in zwei Theile zer-

fällt und diese ein einziges Grenzgebilde bestimmen, so hat dasselbe $m-1$ Dimensionen und kann auch direct durch $n-m+1$ Zerlegungen des Raumes erhalten werden."

„Die Grenzgebilde, zu denen man durch Theilung von Grenzgebilden gelangt, sind von denen nicht verschieden, welche durch Theilung des Raumes erhalten werden."

Bei der Bewegung eines Körpers sind für ein Grenzgebilde, welches durch Theilung dieses Körpers erhalten wird, drei Fälle möglich: *a*) jeder beliebig abgegrenzte Körpertheil, welcher auf dem Grenzgebilde liegt, bleibt bei der Bewegung in theilweiser Deckung mit seiner Anfangslage; *b*) ein Körpertheil, welcher auf dem Gebilde liegt, verlässt seine Anfangslage, aber er liegt auch in jeder neuen Lage auf dem Gebilde (deckt nur solche Raumtheile, welche auch bei Beginn der Bewegung dem Gebilde angehören); *c*) ein Körpertheil, welcher bei Beginn der Bewegung dem Grenzgebilde angehört, nimmt bei der Bewegung auch solche Lagen an, welche nicht der Anfangslage des Gebildes angehören. Im ersten Falle sagen wir, das Gebilde bleibe in Ruhe; im zweiten, dasselbe werde in sich bewegt, und im dritten, es verlasse seine Anfangslage. Jetzt besteht der Satz:

Wenn jeder Theil eines m-fach ausgedehnten Gebildes bei der Bewegung seine Anfangslage verlässt, so beschreibt dasselbe ein $(m+1)$-dimensionales Gebilde; d. h. sind zur Bestimmung eines Grenzgebildes in einem n-dimensionalen Raume $n-m$ Theilungen nothwendig, und wird ein solches Gebilde derartig bewegt, dass es seine Anfangslage verlässt, so kann man stets $n-m-1$ Theilungen des Raumes so ausführen, dass jeder Körpertheil, welcher bei Beginn der Bewegung dem durch die erste Theilung erhaltenen Gebilde angehört, während derselben stets auf dem letzteren liegt, und dass umgekehrt jeder Raumtheil, welcher auf dem letzteren liegt, wenigstens theilweise von einem solchen Theile des bewegten Körpers bedeckt wird, dass dieser Körpertheil in der Anfangslage dem gegebenen Gebilde angehört.

Betreffs des Beweises, dessen Durchführung recht weitläufig sein würde, möge es genügen, den Grundgedanken anzugeben. Man nehme alle Lagen, welche das Gebilde vor und nach einer bei der Bewegung erlangten ganz bestimmten Lage annimmt; dann wird hierdurch eine Theilung des erzeugten Gebildes angegeben, und die gegenseitige Grenze wird durch ein m-dimensionales Gebilde gebildet; bei einer Theilung

in zwei Theile hat aber das Grenzgebilde eine Dimension weniger als jeder Theil.

Hier würde der Ort sein, für die Raumgebilde den Grad des Zusammenhanges im *Riemann*schen Sinne zu erörtern; indessen können diese Beziehungen im Folgenden entbehrt werden und sollen deshalb hier nicht behandelt werden.

§ 6.

Die Mittellage zwischen zwei Lagen desselben festen Körpers. Die gleichförmige Bewegung.

Die drei vorangehenden Paragraphen benutzten hauptsächlich nur die sechs ersten Grundsätze, und derjenige Theil, nämlich ein Abschnitt in § 3, welcher sich bereits auf den Grundsatz VII stützte, konnte ohne Beeinträchtigung des Zusammenhanges ausgelassen werden und fand auch in den beiden folgenden Paragraphen keine Anwendung. Von jetzt an werden wir vor allem aus dem siebenten Grundsatze weitere Folgerungen ziehen müssen, und diese werden sich eng an den zweiten Theil des dritten Paragraphen anschliessen.

Es seien M und N zwei Lagen desselben festen Körpers in dem Sinne, welcher im Anschluss an Grundsatz VII angegeben ist; es soll also festgesetzt sein, welchen Raumtheil jeder Theil des bewegten Körpers sowohl in der ersten wie in der zweiten Lage einnimmt. Indem wir demnach die Raumtheile M und N einander als zwei Lagen desselben festen Körpers zuordnen, ordnen wir zugleich jedem Theile von M einen bestimmten Theil von N zu. Während der Körper I die Lage M einnimmt, deckt ein mit I fest verbundener Körper II die Lage N. Sobald jetzt I die Lage N erhält, muss II eine ganz bestimmte Lage P annehmen. Natürlich muss auch P von dem Körper I gedeckt werden können. Betrachten wir M als die Anfangs-, P als die Endlage desselben Körpers, so nennen wir N seine Mittellage. Wir definiren dieselbe in folgender Weise:

Werden zwei Lagen M und P desselben Körpers I *als Anfangs- und Endlage unterschieden, so hat die Mittellage N die Eigenschaft, dass ein mit* I *fest verbundener Körper* II, *welcher in der Anfangslage von* I *mit N zusammenfällt, in die Endlage P gelangt, sobald der Körper* I *die Lage N annimmt.*

Wir wollen das Wort congruent nicht bloss für einen einzelnen Körper oder Raumtheil benutzen, sondern im Sinne des § 3 auch für die

Zusammenstellung von Raumtheilen. Dann können wir kürzer sagen: N ist die Mittellage von M und P, wenn die Zusammenstellung MN zu NP congruent ist.

Während es selbstverständlich ist, dass nach beliebiger Wahl der congruenten Raumtheile M und N stets P den Bedingungen entsprechend gefunden werden kann, muss die Frage gestellt werden, ob auch nach beliebiger Wahl von M und P stets N der Forderung gemäss bestimmt werden kann. Dass diese Frage bejaht werden muss, zeigen die folgenden Betrachtungen.

Wir führen eine andere Bezeichnung ein, wobei wir nochmals hervorheben, dass den Worten „Lage" und „congruent" die dem Grundsatz VII entsprechende Bedeutung beigelegt werden soll. Es seien A_1 und B_1 irgend zwei Lagen desselben Körpers, A_1 die Anfangs-, B_1 die Endlage. A_i sei irgend ein mit A_1 congruenter Raumtheil. Wir denken uns einen festen Körper, von dem ein Theil den Raumtheil A_1, ein zweiter B_1 und ein dritter A_i deckt. (Dieser eine Körper kann nach § 3 durch eine Folge von festen Körpern ersetzt werden, ohne dass die folgenden Entwicklungen sich ändern.) Sobald dann derjenige Theil k_1, welcher zuerst mit A_1 in Deckung war, in die Lage A_i gelangt, wird ein gewisser anderer Theil k_2 dieses Körpers die Lage B_1 annehmen. Dieser Körper k_2 nimmt aber eine Lage B_i an, sobald man k_1 wieder in die Lage A_1 zurückbringt. Dann ist B_i durch A_1, B_1 und A_i vollständig bestimmt. Indem wir den kurzen (wenn auch ungenauen) in § 3 eingeführten Ausdruck anwenden, können wir sagen: Sind die drei congruenten Raumtheile A_1, B_1, A_i beliebig gegeben, so giebt es einen bestimmten Raumtheil B_i, welcher nach B_1 gelangt, wenn A_1 nach A_i zu liegen kommt. Zugleich ist die feste Zusammenstellung A_1B_i zu A_iB_1 congruent. Hiernach wird jedem zu A_1 congruenten Raumtheil A_i ein Raumtheil B_i zugeordnet. Diese Zuordnung ist reciprok. Wenn nämlich der gegebene Körper Anfangs in B_1 vorausgesetzt und A_1 als zweite Lage gewählt wird, so wird A_i nach A_1 gelangen, wofern B_1 die Lage B_i annimmt. Wären wir von den beiden Lagen A_i und B_i ausgegangen und hätten nach den getroffenen Festsetzungen die zu A_1 zugeordnete Lage gesucht, so wären wir zu B_1 gelangt. Daraus folgt ferner, dass, wenn bei der ersten Zuordnung A_x und B_x einander zugeordnet sind, sie es auch bleiben, wenn man A_i und B_i als die zuerst einander zugeordneten Lagen betrachtet. Diese Ueberlegungen liefern den Satz:

Alle Lagen, welche derselbe feste Körper überhaupt annehmen kann, lassen sich reciprok einander in eindeutiger Weise zuordnen. Diese Zuordnung kann dadurch erhalten werden, dass man irgend zwei Lagen A_1 und B_1 einander zuordnet und die einer beliebigen Lage A_i zugeordnete Lage B_i durch die Forderung bestimmt, dass $A_1 B_i \cong A_i B_1$ sein soll. Nachdem einmal diese Zuordnung durchgeführt ist, ist dieselbe von dem gewählten Paare unabhängig; sind A_x und B_x ein Paar, zu dem man auf dem angegebenen Wege gelangt, so erhält man dieselbe Zuordnung, wenn man von diesem Paare ausgeht.

Um eine derartige Zuordnung zu bestimmen, ist es gleichgültig, von welcher Lage A_i man ausgeht, da jedenfalls jede Lage des Körpers als eine Lage A_i vorkommt. Demnach kann man eine ganz bestimmte Lage A festhalten und dieser jede Lage B desselben Körpers zugeordnet denken. Dann möge das Symbol $[AB]$ diejenige Zuordnung bedeuten, bei welcher dem Raumtheil A der B entspricht. Demnach kann ich jede zweite Zuordnung durch das Symbol $[AB']$ bezeichnen, und ich werde alle derartigen Zuordnungen erhalten, wenn ich mir denke, dass für B' alle verschiedenen Lagen des Körpers gewählt werden dürfen. Auch bezeichnen $[AB]$ und $[AC]$ nur dann dieselbe Zuordnung, wenn B und C identisch sind.

Jetzt sei $[AB]$ wieder irgend eine Zuordnung; ich nehme an, man lasse die beiden Räume A und B gleichzeitig durch denselben Körper k gedeckt sein, wobei A durch a, B durch b eingenommen wird. Jetzt bewege man den Körper k beliebig und in einer zweiten Lage decke a den Raum A', b den Raum B'. Dann wird auch durch $[A'B']$ eine derartige Zuordnung angegeben. Diese Zuordnung wird nur in ganz speciellen Fällen mit $[AB]$ identisch sein, und jedenfalls kann man um A einen gewissen Raumtheil begrenzen, so dass jedesmal, wenn A' in demselben verbleibt, für $A'B' \cong AB$ die Zuordnung $[A'B']$ von $[AB]$ verschieden ist. Somit kann ich sagen: Nachdem ich zu A einen bestimmten Raumtheil B zugeordnet habe, ist durch jede andere mit A congruente Lage A' wieder eine Zuordnung bestimmt, wenn festgesetzt wird, dass dem A' das B' zugeordnet ist, für welches $AB \cong A'B'$ ist. Zugleich werden, solange A' in einem gewissen Raumtheil verbleibt, verschiedene Lagen von A und A' auch verschiedene Zuordnungen bestimmen.

Wir haben also zwei Methoden, um aus einer gegebenen Zuordnung $[AB]$ immer neue zu erhalten: die erste lässt A fest und ersetzt B durch alle damit congruenten Raumtheile; die andere Methode lässt $\overline{AB}$ congruent

und ersetzt A durch alle damit congruenten Raumtheile. Die erste Methode liefert alle möglichen Zuordnungen; es handelt sich darum, zu zeigen, dass auch der zweite Weg, der mit dem ersten von gleicher Mächtigkeit ist, alle möglichen Zuordnungen liefert.

Wir nehmen an, die Zuordnungen $[AB]$ und $[CD]$ seien identisch, d. h. bei der Zuordnung $[CD]$ entspräche B dem A. Bewegt man jetzt $\ddot{C}\overline{D}$ so, dass deren Figur ungeändert bleibt, so wird auch das dem festgewählten A entsprechende B sich ändern. Wie man aber leicht nachweist, gelten für diese Aenderungen des B dieselben Gesetze, wie für die starre Bewegung, und wir können diese verschiedenen B durch Bewegung eines starren Körpers erhalten. So entspricht jeder Bewegung des Systems CD eine ganz bestimmte Bewegung von B. Hierbei bleibt, solange C innerhalb eines gewissen Raumtheiles gehalten wird, auch B in einem ganz bestimmten Raumtheil. Verfolgt man die beiderseitige Aenderung weiter, jedoch so, dass man jede auf den angegebenen Raumtheil beschränkt, so erkennt man, dass auf dem angegebenen Wege wirklich jede Bewegung von B erhalten werden kann. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Wenn bei irgend einer der oben charakterisirten reciproken Zuordnungen aller Lagen, welche derselbe feste Körper annehmen kann, die Lagen A und B einander zugeordnet sind, so kann man alle anderen derartigen Zuordnungen dadurch erhalten, dass man einen Körper, welcher zugleich die Räume A und B deckt, bewegt, hierdurch eine Congruenz von $\ddot{A}'\overline{B'}$ mit $\overline{AB}$ herleitet und nun A' und B' als zugeordnete Lagen auffasst.

Gebrauchen wir jetzt das Wort „starre Bewegung des Raumes“ in dem oben dargelegten Sinne, so können wir sagen:

Wenn irgend eine der oben charakterisirten Zuordnungen der sämmtlichen Lagen desselben festen Körpers gegeben ist, so wird jede zweite derartige Zuordnung durch starre Bewegung des Raumes erhalten.

Alle derartigen Zuordnungen sind also im Wesentlichen identisch und unterscheiden sich bloss durch die Lage.

Die Zuordnung $[AB]$ ist auch dann vollständig bestimmt, wenn die Lage A mit B zusammenfällt, wenn also eine Lage A sich selbst entspricht. Nach dem vorstehenden Satze kann man demnach auch jede andere Zuordnung dadurch erhalten, dass man A sich selbst zuordnet und festsetzt, dass jedesmal die neue durch Bewegung erhaltene Lage sich selbst zugeordnet ist. Daraus folgt:

Bei jeder Zuordnung der bezeichneten Art ist eine Lage sich selbst zugeordnet.

Damit ist denn auch der Satz erwiesen:

Sind A und B irgend zwei Lagen desselben festen Körpers, so giebt es für dieselben stets eine Mittellage.

Schon im Beweise wurde darauf hingewiesen, dass man es durch passende Begrenzung eines A und B enthaltenden Raumtheiles (R) stets erreichen kann, dass nur eine einzige Mittellage innerhalb (R) vorkommt. Dann kann die Wahl von (R) aber auch so getroffen werden, dass auch die Mittellage von A und M, sowie die von M und B demselben Raumtheil angehört, und dass in demselben je nur eine einzige vorkommt. Hierdurch kann man erreichen, dass das Problem, die Mittellage zu suchen, nicht nur für die beiden gegebenen Lagen eine einzige Lösung zulässt, sondern diese Eigenschaft bestehen bleibt, wenn man sich für irgend zwei der allmählich gefundenen Lagen dasselbe Problem stellt.

Indem man den Begriff der Congruenz für Systeme von Raumtheilen anwendet, kann man dem Satz über die Mittellage folgenden Ausspruch geben:

Wenn A_0 und A_1 irgend zwei Lagen desselben Körpers sind, so giebt es stets eine dritte Lage $A_{\frac{1}{2}}$ desselben Körpers, so dass ist $A_0 A_{\frac{1}{2}} \cong A_{\frac{1}{2}} A_1$.

Dieser Satz kann in der folgenden Weise erweitert werden:

Wenn A_0 und A_1 irgend zwei Lagen desselben festen Körpers sind, so kann man stets $m-1$ Lagen $A_{\frac{1}{m}}, A_{\frac{2}{m}}, \ldots A_{\frac{m-1}{m}}$ so bestimmen, dass jedesmal für $0 < \iota < m$ ist:

$$A_{\frac{\iota-1}{m}} A_{\frac{\iota}{m}} \cong A_{\frac{\iota}{m}} A_{\frac{\iota+1}{m}}, \quad \text{wo} \quad \frac{m}{m} = 1$$

sein soll. Auch ist das Problem, $A_{\frac{1}{m}}$ zu finden, entweder von selbst eindeutig oder kann sehr leicht dazu gemacht werden.

Auf den Beweis dieses Satzes brauchen wir um so weniger einzugehen, da wir den Satz ganz gut entbehren können; es kommt dies darauf hinaus, dass wir uns im Folgenden bei den als Marken angehängten Brüchen auf solche beschränken, deren Nenner Potenzen von 2 sind.

Indem wir von zwei Lagen A_0 und A_1 ausgehen, definiren wir durch die Gleichung $A_0 A_1 \cong A_1 A_2$ die Lage A_2 und allgemein, nachdem wir für ein ganzzahliges i zu einer Lage A_i gekommen sind, durch $A_0 A_1 \cong A_i A_{i+1}$ auch A_{i+1}. Ebenso ordnen wir durch die Gleichung $A_{-1} A_0 \cong A_0 A_1$ und

$A_{-i-1}A_{-i} \cong A_0A_1$ jedem ganzzahligen positiven und negativen i eine bestimmte Lage A_i zu. (Dabei wird es gut sein, zunächst nur stets innerhalb des oben definirten Raumtheiles (R) zu bleiben, und auch sonst für die Grösse des Raumtheiles passende Beschränkungen einzuführen.) Die Forderungen $A_0A_{\frac{1}{2}} \cong A_{\frac{1}{2}}A_1$, $A_0A_{\frac{1}{4}} \cong A_{\frac{1}{4}}A_{\frac{1}{2}}$ u. s. w. machen es möglich, eine einzige bestimmte Lage für $A_{\frac{1}{m}}$ anzugeben, wenn m eine Potenz von zwei ist. Lässt man dann in $A_0A_{\frac{1}{m}} \cong A_{\frac{i}{m}}A_{\frac{i+1}{m}}$ zunächst das i der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3, ... und dann $i+1$ der Reihe nach die Werthe 0, -1, -2, ... annehmen, so gelangt man zu einer ganz bestimmten Lage $A_{\frac{i}{m}}$. Will man sich für m von der bezeichneten Beschränkung frei machen, so hat man den oben ohne Beweis mitgetheilten Satz anzuwenden. Jedenfalls gilt folgender Satz:

Geht man von den beiden Lagen A_0 und A_1 aus und ordnet in der angegebenen Weise einer Zahl $\frac{a}{m}$ eine Lage $A_{\frac{a}{m}}$ zu, so wird die Lage $A_{\frac{a}{m}}$ mit der Lage $A_{\frac{b}{n}}$ identisch, wenn der Werth von $\frac{a}{m}$ gleich dem von $\frac{b}{n}$ ist.

Es erübrigt jetzt noch, allen denjenigen Zahlen, bei deren Darstellung man unendlich vieler Brüche bedarf, wenn sie in der angegebenen Weise erfolgt, eine bestimmte Lage zuzuordnen. Hierauf glaube ich jedoch an dieser Stelle nicht eingehen zu sollen.

Nehmen wir jetzt irgend eine Menge von Zahlen und ordnen dieselben nach ihrer Grösse $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$. Zu denselben mögen die Lagen $A_{\alpha_0}, A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_\nu}$ gehören. Dann kann ich den vermittelnden Körper k aus der Lage A_{α_0} nach A_{α_1}, von da nach A_{α_2} u. s. w. bewegen. Wenn dann A_{α_0} und A_{α_1} einen gewissen Theil gemeinschaftlich haben, so soll k diesen Theil auch während der ganzen von A_{α_0} nach A_{α_1} führenden Bewegung decken. Indem man in gleicher Weise unbegrenzt fortfährt, erhält man den Satz:

Man kann einen Körper so bewegen, dass, wenn A und B irgend zwei während der Bewegung erhaltene Lagen sind, auch die Mittellage von A und B bei der Bewegung einmal gedeckt wird.

Eine solche Bewegung nenne ich eine gleichförmige; dieselbe hat folgende Eigenschaften:

1) jede Linie, welche ein Punkt bei seiner Bewegung beschreibt, wird während derselben in sich verschoben;

2) sind *A, B, C, D* Punkte auf einer solchen Linie, und ist $AB \cong CD$, so ist auch $AC \cong BD$.

Demnach können wir das oben erhaltene Resultat in folgender Form aussprechen:

Sind für einen Körper zwei Lagen gegeben, so kann man ihn stets aus der ersten in die zweite Lage durch eine gleichförmige Bewegung bringen.

§ 7.

Aufstellung von Coordinaten.

Ich will jetzt zeigen, wie man ein Stück einer in sich verschiebbaren Linie durch ein beliebiges anderes Stück derselben Linie messen kann. Da die Messung vermittelst der gleichförmigen Bewegung, bei welcher die Linie in Deckung mit ihrer Anfangslage bleibt, ausgeführt wird, es aber denkbar ist, dass dieselbe Linie bei verschiedenen gleichförmigen Bewegungen in sich verschoben wird, so gilt die Messung nur in Bezug auf eine bestimmte gleichförmige Bewegung. (Die Zeit für die Messung zu benutzen, geht um so weniger an, da sich bei unserm Ausgangspunkt kein Mittel zu ihrer Messung bietet; es kommt hinzu, dass bei unserer Definition der gleichförmigen Bewegung die ungleiche Geschwindigkeit nicht ausgeschlossen ist.)

Es genügt offenbar, anzunehmen, dass die zu messenden Strecken von demselben Punkte ausgehen. Es seien α_0 und α_1 zwei Punkte auf der betrachteten Linie; man beachte zunächst diejenige Lage A_0 des festen Körpers k, bei welchem ein Punkt π desselben mit α_0 in Deckung ist, und dann als zweite Lage A_1 diejenige, bei welcher π den Punkt α_1 deckt. Die Linie $\alpha_0\alpha_1$ wähle man als Einheit. Wenn jetzt σ irgend eine Zahl ist, so ordne man ihr die Lage A_σ des Körpers k zu, welche am Schluss des vorigen Paragraphen als zu σ gehörig bestimmt worden ist. Denjenigen Punkt α_σ auf der Linie, welchen π in der Lage A_σ einnimmt, lasse man der Zahl σ entsprechen. Damit ist jeder Zahl σ ein ganz bestimmter Punkt α_σ und somit auch eine bestimmte Strecke $\alpha_0\alpha_\sigma$ zugeordnet. Dabei gelten die folgenden Sätze:

„Sind $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ zwei gleiche, wenn auch auf verschiedenem Wege erhaltene Zahlen, so fallen die zugeordneten Punkte $\alpha_\mathfrak{s}$ und $\alpha_\mathfrak{t}$ zusammen."

„Sind $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ zwei ungleiche positive Zahlen und $\mathfrak{s} < \mathfrak{t}$, so liegt der Punkt $\alpha_{\mathfrak{s}}$ auf der Strecke $\alpha_0 \alpha_{\mathfrak{t}}$."

Umgekehrt, wenn nach beliebiger Wahl der Punkte α_0 und α_1 auf der Linie ein weiterer Punkt β auf ihr gegeben ist, so lässt sich diesem Punkte in der angegebenen Weise eine einzige Zahl zuordnen. Man kann nämlich nach Annahme eines jeden ganzzahligen m eine Zahl $\mathfrak{a}_m$ finden, so dass der zu $\frac{\mathfrak{a}_m}{2^m}$ zugeordnete Punkt der Strecke $\alpha_0\beta$ angehört, während jedenfalls der zu $\frac{\mathfrak{a}_m+1}{2^m}$ zugeordnete Punkt nicht mehr auf dieser Strecke liegt. Zugleich genügen die $\mathfrak{a}_m$ den Bedingungen:

$$\mathfrak{a}_{m+p} \geqq \mathfrak{a}_m . 2^p \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}_{m+p}+1 \leqq (\mathfrak{a}_m+1)2^p.$$

Dies, sowie eine andere Grenzbetrachtung, die hierher gehört, kommt auf Erwägungen hinaus, welche wir bereits im vorigen Paragraphen anstellen mussten, aber, um nicht zu weitläufig zu werden, dort übergangen haben.

Die Aufstellung eines Coordinatensystems bietet keine Schwierigkeit. Einen beliebigen Punkt α_0 wähle man zum Anfangspunkt und setze fest, dass für ihn alle Coordinaten den Werth Null erhalten sollen. Wir lassen einen Körper, von dem ein Punkt in der Anfangslage den Punkt α_0 deckt, eine gleichförmige Bewegung machen. Alle Punkte der Linie, welche hierbei vom Nullpunkt beschrieben wird, sollen die Coordinaten $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots x_{n-1} = 0$ haben. Um die Coordinaten x_n eines beliebigen Punktes β auf dieser Linie zu bestimmen, wähle man einen weiteren Punkt α_1 auf dieser Linie willkürlich; dann soll x_n die positive oder negative Masszahl von $\alpha_0\beta$ durch $\alpha_0\alpha_1$ sein.

Nun wählt man irgend eine zweite gleichförmige Bewegung, durch welche die so eben benutzte Linie weder in Ruhe bleibt, noch in sich verschoben wird. Die Linie, welche jetzt der Nullpunkt beschreibt, habe für $x_1, \ldots x_{n-2}, x_n$ verschwindende Werthe, und die Werthe von x_{n-1} werden nach Festsetzung einer beliebigen Einheit in derselben Weise bestimmt, wie vorher die x_n. Bei dieser Bewegung beschreibt aber auch die Linie $(x_1 = 0, \ldots x_{n-1} = 0, x_n)$ eine Fläche, und die jedesmalige Lage der Linie ist bestimmt, sobald die des Nullpunktes bekannt ist. Wenn also der Nullpunkt nach $(0, \ldots 0, a_{n-1}, 0)$ gelangt, d. h. nach dem Punkte:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = x_n = 0, \quad x_{n-1} = a_{n-1},$$

so kommt der Punkt $(0, 0, \ldots 0, a_n)$ in einen ganz bestimmten Punkt, und dessen Coordinaten sollen sein $x_1 = \cdots = x_{n-2} = 0$, $x_{n-1} = a_{n-1}$, $x_n = a_n$.

In derselben Weise fährt man fort, indem man eine dritte gleichförmige Bewegung hinzunimmt, durch welche der Nullpunkt ausserhalb des Gebildes $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 0$ gelangt. Für die Linie, welche der Nullpunkt alsdann beschreibt, sollen alle Coordinaten bis auf x_{n-2} verschwinden, und der Werth von x_{n-2} ähnlich wie vorher bestimmt werden. Die Lage, welche der Punkt $(0, 0, \ldots 0, a_{n-1}, a_n)$ annimmt, wenn der Anfangspunkt nach $(0, 0, \ldots 0, a_{n-2}, 0, 0)$ gelangt, soll mit $(0, \ldots 0, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ bezeichnet werden. Jetzt füge man der Reihe nach eine neue Bewegung hinzu, bis man durch n gleichförmige Bewegungen dazu gelangt, jedem System $(x_1, \ldots x_n)$ einen Punkt zuzuordnen.

Alsdann gilt der Satz:

„Bei der festgesetzten Anordnung entspricht jedem Werthsystem $(x_1, \ldots x_n)$ ein einziger Punkt des Raumes, und umgekehrt kann man um den Nullpunkt ein Gebiet abgrenzen und ebenso um das Werthsystem $(0, \ldots 0)$ ein n-fach ausgedehntes Continuum $(x_1, \ldots x_n)$ bestimmen, so dass jedem Punkte des Gebietes ein System des Continuums entspricht, und zwar ein einziges."

Der erste Theil des Satzes bedarf keiner näheren Begründung; der zweite Theil ergiebt sich wie folgt. Lässt man bei verschwindendem Werthe von $x_1, \ldots x_{n-1}$ die x_n von Null aus wachsen, so gelangt man entweder wieder zum Anfangspunkte zurück oder nicht. Im letzten Falle (bei welchem die Linie keineswegs unendlich zu sein braucht), entsprechen ungleichen Werthen von x_n auch verschiedene Punkte. Im ersten Falle giebt es einen ersten positiven und einen ersten negativen Werth von x_n, welche denselben Punkt bezeichnen. Solange x_n zwischen diesen Werthen bleibt, wird jedem Punkte der Linie nur ein einziger Werth von x_n entsprechen. Diese Grenzen von x_n werden dadurch nicht beschränkt, dass x_{n-1} von Null verschiedene Werthe erhält, wofern die Linie $(0, \ldots 0, x_n)$ bei der zweiten Bewegung keinen ruhenden Punkt enthält. Wenn aber dabei ein Punkt dieser Linie in Ruhe verbleibt, so gilt die Eindeutigkeit bis zum ersten ruhenden Punkte, also noch immer bis zu einem endlichen Werthe von x_n. Ebenso kann das Gebiet für x_n infolge der späteren Bewegungen, sowie dadurch beschränkt werden, dass ein Punkt $(a_1, \ldots a_n)$ bei nicht verschwindenden Werthen von $a_1, \ldots a_n$ mit dem Nullpunkt zusammenfällt. Aehnliche Beschränkungen können für die anderen Coordinaten eintreten; aber immerhin behält jede Coordinate einen endlichen Spielraum. Die Gesammtheit der Punkte, welche durch alle hiernach gestatteten Werthsysteme dargestellt werden,

füllt aber einen gewissen, um den Nullpunkt gelegenen Raumtheil an, was in derselben Weise gezeigt wird, in welcher wir zu einer Definition von der Zahl der Dimensionen gelangt sind und bewiesen haben, dass diese Zahl für jede Raumform eine feste Bedeutung hat.

Hiernach ist die Bestimmung der Coordinaten auf n gleichförmige Bewegungen oder, wenn man will, auf $n+1$ Lagen desselben Körpers zurückgeführt. Diese Bewegungen müssen nur gewissen Beschränkungen unterliegen, können aber im Uebrigen ganz willkürlich gewählt werden. Diese Willkür kann häufig benutzt werden, um solche Coordinatensysteme zu erhalten, deren Anwendung zu den einfachsten Formeln führt. Man kann auch die Coordinaten $x_1, \dots x_n$ durch ganz beliebige Bewegungen bestimmen, und dann neue Coordinaten $y_1, \dots y_n$ als Functionen der x einführen. Diese Functionen müssen von einander unabhängig sein; wenn sie ferner für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ die Werthe $b_1, \dots b_n$ annehmen, so muss um $(0, \dots 0)$ ein Gebiet der x und um $(b_1, \dots b_n)$ ein Gebiet der y so abgegrenzt werden können, dass für beide Gebiete stetige und eindeutige Beziehung stattfindet.

Indem wir die Möglichkeit dieser allgemeinen Coordinatenbestimmung im Auge behalten, liefert die obige Entwickelung den Satz:

In jeder Raumform von n Dimensionen lassen sich die Coordinaten und n gleichförmige Bewegungen so auswählen, dass zwischen denselben folgende Beziehung besteht: durch die erste Bewegung bleiben alle Coordinaten $x_2, \dots x_n$ ungeändert und alle x_1 wachsen gleichzeitig um dieselbe Grösse; durch die zweite Bewegung bleiben in dem Gebilde, für welches $x_1 = 0$ ist, die $x_3, \dots x_n$ ungeändert, und die x_2 ändern sich gleichmässig; Entsprechendes gilt bei der dritten Bewegung für das Gebilde $x_1 = x_2 = 0$, u. s. w., endlich wachsen bei der letzten Bewegung für das Gebilde $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0$ die Coordinaten x_n um dieselbe Grösse.

§ 8.

Beweglichkeit einer Raumform; die zu einer Raumform gehörige Transformations-Gruppe.

Wenn ein beliebig gewählter Körper durch irgend eine Bewegung aus einer ersten in eine zweite Lage gebracht wird, so möge ein Punkt des Körpers, welcher in der ersten Lage die Coordinaten $x_1, \dots x_n$ hat, in seiner zweiten Lage den Punkt $x_1', \dots x_n'$ decken. Dabei ist es keineswegs nothwendig, die Coordinaten $x_1, \dots x_n$ auf solche Punkte zu beschränken, welche dem Körper in seiner ersten Lage wirklich angehören;

vielmehr kann man den Körper unbegrenzt fortgesetzt denken, und dabei wird jedem Punkte x (soweit die angegebene Coordinatenbestimmung sich erstreckt) als der ersten Lage angehörig ein bestimmter Punkt x' zugeordnet. Die beiden Lagen vermitteln also eine Transformation:

$$(1.)\qquad x'_\iota = f_\iota(x_1, \dots x_n) \qquad (\iota = 1, \dots n).$$

Nun denken wir uns den Körper aus der zweiten Lage x' in eine dritte Lage x'' gebracht; das möge durch die Transformation vermittelt werden:

$$(2.)\qquad x''_\iota = g_\iota(x'_1, \dots x'_n).$$

In die letzte Gleichung mögen die Werthe aus (1.) eingesetzt werden, wodurch wir erhalten:

$$(3.)\qquad x''_\iota = g_\iota(f_1(x), \dots f_n(x)) = h_\iota(x_1, \dots x_n).$$

Nach den Grundbegriffen ist es aber möglich, die dritte Lage auch aus der ersten zu erhalten; folglich stellt auch die Transformation (3.) das Ergebniss einer Bewegung dar. Wir denken uns alle Transformationen, welche das Ergebniss der überhaupt möglichen Bewegungen des Raumes darstellen, zu einem System vereinigt, so erkennen wir, dass auch irgend zwei Transformationen, nach einander ausgeführt, wieder eine dem System angehörige Transformation ergeben. Jedesmal, wenn die Transformationen (1.) und (2.) dem System angehören, muss auch die Transformation (3.) dem System angehören. Ein solches System nennt Herr *Lie* eine Transformations-Gruppe.

Nun ist es an sich klar, dass die einzelnen Transformationen nicht discret, sondern stetig sein müssen. Die stetigen Transformations-Gruppen theilt Herr *Lie* ein in endliche und unendliche. Ob die letzteren überhaupt den Grundsätzen I bis VII gehorchen, möge unentschieden bleiben; jedenfalls kann auf ein derartiges System von Bewegungen der Grundsatz VIII nicht angewandt werden; wir schliessen diese Gruppen daher von unserer Betrachtung aus. Eine jede endliche Transformations-Gruppe kann aber dadurch erhalten werden, dass man einer endlichen Anzahl r von Parametern $a_1, \dots a_r$ alle möglichen Werthe beilegt, durch jedes Werthsystem $a_1, \dots a_r$ stets n Functionen $f_1(x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_r), \dots f_n(x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_r)$ bestimmt sein lässt und die dem System $(a_1, \dots a_r)$ zugeordnete Transformation durch die Gleichungen darstellt:

$$(4.)\qquad x'_\iota = f_\iota(x_1, \dots x_n;\ a_1, \dots a_r) \qquad (\iota = 1, \dots n).$$

Hierdurch ist eine Gruppe dargestellt, wenn aus den $2n$ Gleichungen

$$(5.)\quad x'_\iota = f_\iota(x_1, \dots x_n;\ a_1, \dots a_r), \quad x''_\iota = f_\iota(x'_1, \dots x'_n;\ b_1, \dots b_r)$$

bei beliebiger Wahl von $a_1, \dots a_r;\ b_1, \dots b_r$ folgt:

$$(6.)\qquad x''_\iota = f_\iota(x_\iota, \dots x_n;\ c_1, \dots c_r),$$

wobei noch ist:

$$(7.)\qquad c_k = \varphi_k(a_1, \dots a_r;\ b_1, \dots b_r).$$

Wird nun noch angenommen, dass, solange $a_1, \dots a_r, b_1, \dots b_r$ in einer gewissen Umgebung eines bestimmt gewählten Parameter-Systems $a_1^{(0)}, \dots a_r^{(0)}$ verbleiben, bei beliebigen Werthen von $x_1, \dots x_n$ die n Gleichungen:

$$f_\iota(x_1, \dots x_n;\ a_1, \dots a_r) = f_\iota(x_1, \dots x_n;\ b_1, \dots b_r)$$

nur für $a_1 = b_1, \dots a_r = b_r$ erfüllt werden können, so sind die Parameter $a_1, \dots a_r$ sämmtlich wesentlich und können nicht durch eine geringere Zahl ersetzt werden. Wenn alle Bewegungen durch eine Transformations-Gruppe mit r wesentlichen Parametern dargestellt werden, so legen wir der Raumform r Grade von Beweglichkeit bei. Somit sind wir, ausgehend von unsern Grundsätzen I bis VII auf die Theorie der stetigen endlichen Transformations-Gruppen gelangt. Nur in einer Beziehung ist die letztere Theorie noch allgemeiner als die der unter diese Grundsätze fallenden Raumformen. Nach dem fünften Grundsatze kann jeder Körper zur theilweisen Deckung mit jedem beliebigen Raumtheile gelangen; folglich muss es möglich sein, durch die Transformationen der Gruppe jeden Punkt x in jeden Punkt x' überzuführen, oder die Gruppe muss transitiv sein. Demnach erhalten wir folgenden Satz:

Alle Bewegungen, welche ein Körper in einer Raumform machen kann, werden durch eine endliche transitive Transformations-Gruppe bestimmt; die Zahl der wesentlichen Parameter dieser Gruppe giebt den Grad der Beweglichkeit für die Raumform an; diese Zahl muss mindestens gleich der Zahl der Dimensionen der Raumform sein.

Die Ergebnisse der beiden letzten Paragraphen gestatten es uns noch, auf einem zweiten Wege zu diesem Resultate zu gelangen. Durch irgend zwei Lagen desselben Körpers ist eine gleichförmige Bewegung bestimmt, welche den Körper aus der ersten in die zweite Lage bringt. Mit der gleichförmigen ist aber zugleich auch die unendlich kleine Bewegung gegeben. Dieser Begriff soll hier nicht näher entwickelt werden; es genüge, folgenden Satz auszusprechen:

„Die unendlich kleinen Aenderungen $dx_1, \dots dx_n$, welche die Coordinaten $x_1, \dots x_n$ durch eine unendlich kleine Bewegung erleiden, lassen sich als Producte von n Functionen $\xi_1(x_1, \dots x_n), \dots \xi_n(x_1, \dots x_n)$ mit einer unendlich kleinen Grösse dt darstellen.“

Gelangt also der Punkt $(x_1, \dots x_n)$ in die Lage $x_1 + dx_1, \dots x_n + dx_n$, so kann gesetzt werden:

$$(8.)\qquad dx_1 = \xi_1 dt, \quad dx_2 = \xi_2 dt, \quad \dots \quad dx_n = \xi_n dt.$$

Wenn eine Raumform die unendlich kleinen Bewegungen zulässt:

$$(9.)\qquad \begin{cases} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n}, \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \dots & \xi_{rn}, \end{cases}$$

wo durch die $k$te Horizontalreihe bezeichnet wird, dass die Componenten der unendlich kleinen Verschiebung proportional sind $\xi_{k1} : \xi_{k2} : \dots : \xi_{kn}$, so ist auch die unendlich kleine Verschiebung möglich:

$$(10.)\qquad \sum_k a_k \xi_{k1}, \quad \sum_k a_k \xi_{k2}, \quad \dots \quad \sum_k a_k \xi_{kn},$$

wo die $a_1, \dots a_r$ von den $x_1, \dots x_n$ unabhängig, aber im Uebrigen ganz willkürlich sind. Unendlich kleine Bewegungen sind (solange nicht ein Unendlichkleines höherer Ordnung mit in Betracht gezogen wird), mit einander vertauschbar. Die Bewegung (10.) ist aus den Bewegungen (9.) zusammengesetzt, und die Bewegungen (9.) sind dann, und nur dann, von einander unabhängig, wenn keine von ihnen aus den übrigen zusammengesetzt ist, wenn also die n Ausdrücke (10.) für constante Werthe von a nur dadurch zum Verschwinden gebracht werden können, dass man alle Coefficienten a gleich Null setzt. Jetzt sind zwei Fälle möglich: entweder lassen sich alle unendlich kleinen Bewegungen, welche eine Raumform gestattet, aus einer endlichen oder aus einer unendlich grossen Zahl von infinitesimalen Bewegungen zusammensetzen. Die letztere Möglichkeit lassen wir ganz ausser Acht und setzen die Zahl der von einander unabhängigen infinitesimalen Bewegungen als endlich voraus. Hiernach stellen wir die Definition auf:

Eine Raumform hat r Grade von Beweglichkeit, wenn sich alle in ihr möglichen unendlich kleinen Bewegungen aus r solchen, aber nicht aus weniger zusammensetzen lassen.

Wir wollen jetzt nachweisen, dass diese Definition mit der oben gegebenen übereinstimmt, und dass die in der Gleichung (4.) gegebene Darstellung der Gruppe aus den infinitesimalen Transformationen hergeleitet werden kann.

Da die allgemeinste unendlich kleine Bewegung durch (10.) bestimmt wird, integriren wir das System der n Differentialgleichungen:

$$dx'_\alpha = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \xi_{\varkappa\alpha}(x')\,dt \qquad (\alpha = 1, \dots n) \tag{11.}$$

und bestimmen deren Constanten so, dass für $t = 0$ jedesmal $x'_\iota = x_\iota$ wird. Dann erhalten wir Gleichungen von der Form:

$$x'_\varkappa = f_\varkappa(x_1, \dots x_n;\ a_1, \dots a_r,\ t). \tag{12.}$$

Nun ändern sich die Gleichungen (11.) nicht, wenn man alle $a_1, \dots a_n$ mit denselben Constanten multiplicirt, wofern man nur gleichzeitig t durch dieselbe Constante dividirt. Somit müssen auch die Gleichungen (12.) bei derselben Operation ungeändert bleiben, oder dieselben sind ausser von $x_1, \dots x_n$ nur noch von $a_1 t, a_2 t, \dots a_r t$ abhängig. Man erhält also hier die in (4.) vorausgesetzte Form.

Auch die unendlich kleinen Bewegungen gestatten zu erkennen, ob eine Gruppe transitiv ist oder nicht. Damit das erstere stattfindet, ist nothwendig und hinreichend, dass durch dieselben der Punkt x in jede unendlich nahe Lage gebracht wird. Es kommt dies darauf hinaus, dass nicht alle Determinanten identisch verschwinden, welche aus je n unter den r Reihen (9.) gebildet werden können.

Da wir bei den vorangehenden Untersuchungen nur die Voraussetzungen I bis VII benutzt haben, so können wir sagen:

Alle Bewegungen, welche durch die ersten sieben Grundsätze bestimmt werden, führen auf eine stetige Transformations-Gruppe; umgekehrt kann man jeder stetigen endlichen transitiven Gruppe von Transformationen ein System zuordnen, welches den genannten Voraussetzungen genügt.

Wir drücken diesen Satz noch in einer anderen Form aus:

Nimmt man den Begriff der Raumformen im allgemeinsten Sinne, so dass für denselben nur die Grundsätze I bis VII gelten, so fällt deren Theorie ganz zusammen mit der der stetigen endlichen transitiven Transformationsgruppen.

Eine Beschränkung kann dieser Satz nur erhalten bei einer unendlich grossen Zahl von Dimensionen und bei einem unendlich grossen Grade der Beweglichkeit.

Abgesehen von der Transitivität scheinen die hier verlangten Gruppen auch noch in einer zweiten Beziehung specieller zu sein als die *Lie*schen, indem jede hier auftretende Gruppe die identische Transformation enthält, während Herr *Lie* dies nicht ausdrücklich voraussetzt. Indessen ist von verschiedenen Seiten bereits nachgewiesen, dass hierin keine Beschränkung liegt.

§ 9.

Ueberblick über die Theorie der Transformationsgruppen.

Es ist nothwendig, an dieser Stelle einige der wichtigsten Sätze über Transformations-Gruppen anzugeben, schon aus dem Grunde, weil jeder solche Satz zugleich für die Raumformen gilt, wenn man diesem Worte seine allgemeinste Bedeutung beilegt. Dazu kommt, dass wir uns bei der Herleitung der speciellen (der „eigentlichen") Raumformen auf die hier mitzutheilenden Sätze stützen müssen.

Wenn durch eine unendlich kleine Transformation die einzelnen Coordinaten x_ι die Veränderung $\xi_{\varrho\iota}\delta t$ erleiden, so wird eine ganz allgemeine Function $f(x_1, \dots x_n)$ um $\delta t . \sum_\iota \xi_{\varrho\iota} \frac{\partial f}{\partial x_\iota}$ verändert werden. Demnach bezeichnet Herr *Lie* eine infinitesimale Transformation symbolisch durch

$$(1.) \qquad X_\varrho f = \sum_\iota \xi_{\varrho\iota} \frac{\partial f}{\partial x_\iota} .$$

Hier mögen $\varrho, \sigma, \tau, \dots$ die Marken $1, 2, \dots r$ angeben und die r so erhaltenen Transformationen sollen von einander unabhängig sein. Wir führen die Bezeichnung ein:

$$(2.) \quad (X_\varrho X_\sigma) = (X_\varrho(X_\sigma f)) - (X_\sigma(X_\varrho f)) = \sum_{\alpha\beta} \left(\xi_{\varrho\alpha} \frac{\partial \xi_{\sigma\beta}}{\partial x_\alpha} - \xi_{\sigma\alpha} \frac{\partial \xi_{\varrho\beta}}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial f}{\partial x_\beta} ,$$

und nennen die so dargestellte infinitesimale Transformation aus $X_\varrho f$ und $X_\sigma f$ combinirt. Dann muss auch sie der Gruppe angehören, und wir erhalten:

$$(3.) \qquad (X_\varrho X_\sigma) = \sum_\mu c_{\varrho\sigma\mu} X_\mu f,$$

wo die c constant sind und der Bedingung $c_{\varrho\sigma\mu} + c_{\sigma\varrho\mu} = 0$ genügen.

Führt man an Stelle von $x_1, \dots x_n$ andere Coordinaten ein, so hat man im Symbol $X_\varrho f$ nur die entsprechende Aenderung zu machen, um das Symbol derselben Transformation für die neuen Variabeln zu erhalten. Ebenso geht $(X_\varrho X_\sigma)$ in die Combination der entsprechenden Ausdrücke über, und die Constanten $c_{\varrho\sigma\mu}$ bleiben ungeändert.

Sind die $\frac{r(r-1)}{2}$ Gleichungen (3.) befriedigt, so führen die r infinitesimalen Transformationen $X_1 f, \dots X_r f$ zu einer Gruppe. Die Integrabilitäts-Bedingungen erfordern aber:

$$(4.)\qquad \sum_\mu \{c_{\sigma\tau\mu}(X_\varrho X_\mu) + c_{\tau\varrho\mu}(X_\sigma X_\mu) + c_{\varrho\sigma\mu}(X_\tau X_\mu)\} = 0$$

oder

$$(5.)\qquad \sum_\mu \{c_{\sigma\tau\mu} c_{\mu\varrho\alpha} + c_{\tau\varrho\mu} c_{\mu\sigma\alpha} + c_{\varrho\sigma\mu} c_{\mu\tau\alpha}\} = 0,$$

wo ϱ, σ, τ drei verschiedene Marken sind und α irgend eine. Diese Gleichungen stellen aber wieder die vollständigen Bedingungen dar; sind die $\binom{r}{1}\binom{r}{2}$ Constanten c so gewählt, dass sie den angegebenen Bedingungen genügen, so kann man immer entsprechende Gruppen bilden.

Wenn eine Gruppe durch die r infinitesimalen Transformationen $X_1 f, \dots X_r f$ bestimmt ist, so kann man auf die verschiedenste Weise r von einander unabhängige lineare Ausdrücke $Y_1 f, \dots Y_r f$ bilden, wo

$$Y_\varkappa f = \sum_\varrho m_{\varkappa\varrho} X_\varrho f$$

ist. Dann ist dieselbe Gruppe auch durch $Y_1 f, \dots Y_r f$ bestimmt. Jetzt ändern sich die Coefficienten c, jedoch so, dass auch für die neuen Constanten die Gleichungen (5.) bestehen. Zwei Gruppen, für welche die Coefficienten c entweder gleich sind oder durch passende Wahl der bestimmenden Transformationen gleich gemacht werden können, heissen gleich zusammengesetzt oder holoedrisch isomorph oder auch etwa gleich gestaltet. Ganz entsprechend heisst die r-gliedrige Gruppe $X_1 f, \dots X_r f$, für welche die Gleichungen (3.) bestehen, meroedrisch isomorph mit der $(r-q)$-gliedrigen $Y_1 f, \dots Y_{r-q} f$, wenn sich aus letzteren r infinitesimale Transformationen $\mathfrak{Y}_1 f, \dots \mathfrak{Y}_r f$, von denen wieder $r-q$ von einander unabhängig sind, linear so bestimmen lassen, dass auch jedesmal

$$(\mathfrak{Y}_\varrho \mathfrak{Y}_\sigma) = \sum_{\varkappa=1}^{r} c_{\varrho\sigma\varkappa} X_\varkappa f$$

ist.

Aus jeder infinitesimalen lässt sich eine einfach unendliche Reihe von endlichen Transformationen herleiten, und wir wollen sagen, jede solche endliche Transformation gehöre zu der gegebenen infinitesimalen. Besteht zwischen zwei unendlich kleinen Transformationen $X_\varrho f$ und $X_\sigma f$ die Beziehung $(X_\varrho X_\sigma) = 0$, so lassen sich alle zu $X_\varrho f$ gehörigen endlichen Trans-

formationen mit den zu $X_\sigma f$ gehörigen vertauschen; d. h. wenn zwei derartige endliche Transformationen nach einander ausgeführt werden, so ist das Resultat unabhängig von der Reihenfolge, in der dies geschieht.

Hiernach kann man aus dem am Schlusse von § 7 mitgetheilten Satze die beiden folgenden herleiten:

„Giebt es in einer Raumform von n Dimensionen n von einander unabhängige und mit einander vertauschbare gleichförmige Bewegungen, und lässt deren Vereinigung einen Punkt nicht in einem Gebilde von weniger als n Dimensionen, so kann man durch passende Wahl der Coordinaten bewirken, dass die zugehörigen n unendlich kleinen Transformationen symbolisch in der Form $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ dargestellt werden."

„Wenn es in einem n-fach ausgedehnten Raume mehr als n von einander unabhängige und mit einander vertauschbare gleichförmige Bewegungen giebt, so muss jede aus den Componenten der entsprechenden infinitesimalen Transformationen gebildete Determinante $n$ten Grades identisch verschwinden; alle diese Bewegungen dürfen vereint mit den aus ihnen zusammengesetzten jeden Punkt höchstens in ein $(n-1)$-dimensionales Gebilde überführen."

Daraus folgt, dass für $n = 1$ nur solche Transformationen mit einander vertauschbar sind, welche aus derselben infinitesimalen Transformation hervorgehen. Dieser Bedingung genügen aber nach der Zusammensetzung nur drei Arten von Gruppen: 1) die eingliedrigen, 2) diejenigen zweigliedrigen, für welche bei passender Wahl von $X_1 f$ und $X_2 f$ die Bedingung $(X_1 X_2) = X_1 f$ befriedigt ist, und (3.) diejenigen dreigliedrigen, in denen drei infinitesimale Transformationen X_1, X_2, X_3 so ausgewählt werden können, dass $(X_1 X_2) = X_2$, $(X_1 X_3) = -X_3$, $(X_2 X_3) = X_1$ ist. Somit giebt es nur drei Gruppen mit einer Veränderlichen, und man kann im ersten Falle die allgemeine Transformation in der Form $x' = x + a$, im zweiten durch die Gleichung $x' = ax + b$ und im dritten durch $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ für $ad \neq bc$ darstellen.

Dagegen zeigt sich für mehrere Variabeln eine weit grössere Mannigfaltigkeit; namentlich giebt es hier stets Gruppen, welche sich bei keiner Wahl der Veränderlichen auf projective zurückführen lassen. Für zwei Variabeln hat Herr *Lie* alle möglichen Gruppen bereits vor längerer Zeit (Math. Annalen Bd. XVI) aufgestellt.

Wenn man wieder $Y_x f$ linear durch $X_1 f, \dots X_r f$ darstellt, jetzt aber nur $m < r$ derartige Transformationen in Betracht zieht und die

Voraussetzung macht, dass sich alle $\frac{m(m-1)}{2}(Y_\iota Y_\varkappa)$ durch $Y_1, \dots Y_m$ darstellen lassen, so bestimmen die $Y_1 f, \dots Y_m f$ eine Untergruppe der gegebenen Gruppe. Eine solche nennt Herr *Lie* invariant, wenn auch jedes $(Y_\iota X_\varrho)$ für $\iota = 1, \dots m$, $\varrho = 1, \dots r$ durch $Y_1 f, \dots Y_m f$ dargestellt werden kann. Wenn unter den $\frac{r(r-1)}{2}$ Transformationen $\sum_\mu c_{\varrho\sigma\mu} X_\mu f$ nur $p (< r)$ von einander unabhängige vorkommen, so bestimmen dieselben eine besonders wichtige invariante Untergruppe, welche als Haupt-Untergruppe bezeichnet werden soll.

Jede infinitesimale Transformation bestimmt für sich eine eingliedrige Untergruppe und ist selbst in einer oder mehreren zweigliedrigen Untergruppen enthalten. Ueberhaupt gilt der Satz, dass jede beliebige Transformation einer m-gliedrigen Untergruppe angehört, wenn m eine der Zahlen $1, \dots 6$ und kleiner als r ist. Dabei ist man jedoch genöthigt, imaginäre Transformationen zuzulassen.

Unter denjenigen Gruppen, welche nicht ihre eigenen Haupt-Untergruppen sind, für welche also weniger als r der Transformationen $(X_\varrho X_\sigma)$ von einander unabhängig sind, nehmen diejenigen eine hervorragende Stellung ein, welche ich aus einem hier nicht zu erörternden Grunde als solche vom Range Null bezeichne. Für dieselben ist die Eigenschaft charakteristisch, dass in jeder ihrer zweigliedrigen Untergruppen die Transformationen mit einander vertauschbar sind. In solchen Gruppen giebt es invariante Untergruppen von jeder Gliederzahl, die kleiner als r ist, speciell also auch mindestens eine eingliedrige Untergruppe, welche mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbar ist.

Diejenigen Gruppen, welche keine invarianten Untergruppen besitzen, heissen einfach. Ihnen am nächsten stehen diejenigen, welche durch blosse Zusammenstellung mehrerer einfacher Gruppen gebildet sind. Wenn nämlich von den Gruppen $G_1, \dots G_h$ keine zwei eine Transformation (ausser der identischen) gemeinschaftlich haben, aber die Transformationen einer jeden G_α mit denen einer jeden G_β für ungleiche Werthe α, β $(= 1, \dots h)$ vertauschbar sind, eine neue Gruppe H aber alle diese und nicht mehr umfasst, so möge es gestattet sein, zu sagen, H sei durch Zusammenstellung der $G_1, \dots G_h$ gebildet. Sind speciell die $G_1, \dots G_h$ sämmtlich einfach, so möge H, solange ein besserer Name fehlt, als halbeinfach bezeichnet werden. Jede Gruppe, welche ihre eigene Haupt-Untergruppe ist, wird gebildet aus

einer einfachen oder halbeinfachen Gruppe und einer invarianten Untergruppe vom Range Null.

Zwei Gruppen, welche durch Transformation der Variabeln in einander übergeführt werden können, werden als ähnlich bezeichnet. Dazu ist die Gleichheit der Zusammensetzung nothwendig. In den meisten Fällen muss aber eine weitere Bedingung hinzutreten. Eine solche ist z. B. bei transitiven Gruppen die Gleichheit der Zusammensetzung für diejenige Untergruppe, bei welcher ein Punkt allgemeiner Lage in Ruhe gehalten wird. Während diese oder eine ähnliche Bedingung vom analytischen Standpunkt aus genügt, tritt für die Geometrie die Forderung hinzu, dass die Variabeln zugleich reell sind.

Während bei Untersuchung der Gruppe alle Werthsysteme $x_1, \dots x_n$ in Betracht zu ziehen sind, hat man als eigentliche Punkte der entsprechenden Raumform nur die Punkte allgemeiner Lage anzusehen; d. h. da hier nur transitive Gruppen betrachtet werden, nur diejenigen Punkte, für welche nicht alle aus n der Reihen (9.) § 8 gebildeten Determinanten verschwinden. Nun liefert das Verschwinden dieser Determinanten gewisse Invarianten der Gruppe, Gebilde, welche bei jeder Transformation der Gruppe in sich verbleiben. Diese Invarianten können als Repräsentanten des Unendlichfernen betrachtet werden.

Durch eine Untergruppe wird entweder ein Punkt allgemeiner Lage wenigstens bis zu einer gewissen Grenze hin in jeden andern Punkt gebracht, oder er verbleibt auf einem gewissen Grenzgebilde. Im zweiten Falle hat das betreffende Gebilde wieder die Eigenschaften einer allgemeinen Raumform. Jede Bewegung des Raumes lässt entweder das Gebilde in sich, oder bringt es zur Deckung mit einem congruenten Gebilde. Wenn die gegebene Gruppe r-gliedrig, diejenige Untergruppe, bei welcher das Gebilde in sich bewegt wird, m-gliedrig ist, so bildet die Gesammtheit der congruenten Gebilde eine $(r-m)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Man kann das einzelne Gebilde als Element dieser Mannigfaltigkeit auffassen, und dann gelten für dieselbe die Gesetze einer Raumform im allgemeinen Sinne. Die für diese Raumform geltenden Bewegungsgesetze sind im Allgemeinen wesentlich dieselben, wie für die gegebene Raumform; die entsprechenden Gruppen sind meistens holoedrisch, zum mindesten meroedrisch isomorph. Dadurch gelangt man von jeder Raumform aus zu einer Reihe weiterer, welche mit ihr in sehr engem Zusammenhange stehen.

Jede intransitive Gruppe hat Invarianten, d. h. Functionen von $x_1, \dots x_n$, welche durch keine Transformation der Gruppe verändert werden. Aber auch bei transitiven Gruppen kann man von Invarianten sprechen, wenn man die Coordinaten mehrerer Punkte in Betracht zieht. Wird nämlich eine beliebige Transformation der Gruppe dargestellt durch

$$y_\iota = f_\iota(x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_r)$$

für $\iota = 1, \dots n$ oder kürzer durch $y_\iota = f_\iota(x, a)$, so stellen bei beliebiger Wahl der $\varrho+1$ Punkte $x, x', \dots x^{(\varrho)}$ die Gleichungen

$$y_\iota = f_\iota(x, a), \quad y'_\iota = f_\iota(x', a), \quad \dots \quad y^{(\varrho)} = f_\iota(x^{(\varrho)}, a)$$

zusammen eine mit der gegebenen Gruppe gleich gestaltete Gruppe von r Parametern und $(\varrho+1).n$ Variabeln dar. Diese Gruppe wird zum mindesten dann intransitiv, wenn $(\varrho+1)n > r$ ist. Folglich giebt es, wie bereits Herr *Lie* hervorgehoben hat, stets eine kleinste Zahl, so dass für diese und jede grössere Zahl von Punkten Invarianten vorkommen. Wenn hiernach die Zahl der Invarianten scheinbar unendlich gross ist, so ist doch die Zahl der von einander unabhängigen endlich und zwar höchstens gleich n. So lassen sich in vielen Fällen alle Invarianten aus einer einzigen herleiten; dazu ist nothwendig, aber keineswegs hinreichend, dass alle n Variabeln in der Invariante wesentlich sind und nicht durch Transformation auf eine geringere Zahl zurückgeführt werden können. Kommen alle derartigen Invarianten auf eine einzige zwischen den Coordinaten zweier Punkte hinaus, so besitzt die Gruppe $\frac{n(n+1)}{2}$ Parameter; treten aber zu einer Invariante, in welcher alle Coordinaten zweier Punkte wesentlich sind, noch davon unabhängige Invarianten hinzu, so wird dadurch die Zahl der Parameter verringert.

§ 10.

Folgerungen aus dem achten Grundsatze.

Bis jetzt haben wir nur die sieben ersten Grundsätze benutzt: indem wir den letzten hinzunehmen, sprechen wir im Gegensatz zu den bis jetzt betrachteten „Raumformen im allgemeinsten Sinne" von den „eigentlichen" oder auch den „speciellen Raumformen". Zunächst wollen wir jetzt diesen Grundsatz in anderer Form aussprechen:

Bei der Ruhe eines Punktes in einem n-dimensionalen Raume wird kein zweiter so bewegt werden können, dass er ein n-dimensionales Gebiet ausfüllt;

zugleich geht durch den ruhenden Punkt kein Gebilde hindurch, welches nothwendig zugleich in Ruhe gehalten oder in sich verschoben wird.

Die eindimensionalen Raumformen können ganz ausgeschlossen werden. Für mehrdimensionale sagt der erste Theil des Grundsatzes aus, dass bei der Ruhe eines Punktes sich jeder zweite höchstens auf einem $(n-1)$-dimensionalen Gebilde bewegt. Der zweite Theil sagt nun zunächst, dass der bewegte Punkt in der That jede Lage auf einem $(n-1)$-dimensionalen Gebilde erlangen kann. Angenommen nämlich, der bewegte Punkt könne höchstens ein $(n-\varrho)$-dimensionales Gebilde beschreiben, wo $\varrho > 1$ ist. Dann ziehe man vom ruhenden Punkte aus eine beliebige Linie und bestimme für jeden Punkt derselben dasjenige Gebilde, auf welchem er noch bewegt werden kann; die Gesammtheit derselben bildet höchstens ein Gebilde von $n-\varrho+1 \leqq n-1$ Dimensionen, und dies wird bei der Bewegung in sich verschoben.

Ferner sind durch unsern Grundsatz diejenigen Gruppen ausgeschlossen, welche Herr *Lie* systatisch nennt, und bei denen jedesmal eine Linie oder Fläche oder ein mehrdimensionales Gebilde in Ruhe bleibt, wofern ein Punkt in Ruhe gehalten wird; wenigstens darf ein solches Gebilde nicht reell sein. Endlich geht durch den ruhenden Punkt überhaupt kein reelles Gebilde hindurch, welches bei jeder alsdann noch möglichen Bewegung in sich verschoben würde.

Da die Gruppe transitiv ist, darf zwischen den Coordinaten $x_1, \dots x_n$ desselben Punktes keine Invariante bestehen. Dagegen muss es zwischen den $2n$ Coordinaten $x_1, \dots x_n$ und $x'_1, \dots x'_n$ eine Beziehung geben, welche bei allen Transformationen der Gruppe ungeändert bleibt, da im andern Falle bei der Ruhe eines Punktes ein zweiter noch jede beliebige Lage erhalten könnte. Das Vorhandensein einer zweiten Invariante zwischen den Coordinaten zweier Punkte würde die bei der Ruhe eines Punktes noch mögliche Bewegung eines jeden zweiten auf ein $(n-2)$-dimensionales Gebiet beschränken. Zwischen zwei Punkten besteht daher eine einzige Invariante; ob davon unabhängig noch eine weitere Invariante für mehr Punkte vorkommt, muss vorläufig unentschieden bleiben.

Diese Invariante zwischen den x und den x' sei:

$$(1.)\qquad J(x_1, \dots x_n;\ x'_1, \dots x'_n).$$

Vertauscht man hierin x und x', so erhält man eine blosse Function von J. Setzt man aber $x_1 = x'_1, \dots x_n = x'_n$, so muss J von $x_1, \dots x_n$ ganz unab-

hängig werden, weil zwischen den Coordinaten eines Punktes keine Invariante bestehen darf. Somit wird $J(x_1, \dots x_n;\ x_1, \dots x_n)$ entweder gleich einer Constante oder ganz unabhängig von dem Punkte x unentschieden. Im letzteren Falle haben wir zu unterscheiden, ob sich für dem x unendlich nahe Punkte x' derselbe Grenzwerth ergiebt oder nicht. Im Allgemeinen muss nämlich die Function eindeutig und stetig sein. So möge man vom Punkte x eine beliebige Linie ziehen; auf dieser Linie möge x' dem x unendlich nahe kommen. Wenn dann $J(x, x')$ stetig verläuft, so nähert sich J für $x = x'$ einem gewissen Grenzwerth. Für eine zweite derartige Linie gelte dasselbe. Sollte aber jetzt J einen andern Grenzwerth erhalten, so beachte man auf den beiden Linien solche Punkte, welche dem Punkte x unendlich nahe sind, und verbinde diese durch eine Linie. Dann wird auf der letzteren eine Unterbrechung der Stetigkeit stattfinden. Somit giebt es vom Punkte x aus ein Gebilde, längs dessen die Stetigkeit unterbrochen wird. Dies Gebilde muss aber auch bei der Ruhe von x in sich verbleiben. Da dies nach unserer Voraussetzung ausgeschlossen ist, muss sich die Function (1.) für alle Werthe von x', welche unendlich nahe an x liegen, demselben Grenzwerthe nähern, und dann können wir durch eine kleine Umänderung immer bewirken, dass

$$J(x_1, \dots x_n;\ \ x_1, \dots x_n) = 0$$

ist, in dem Sinne, dass die Function für alle reellen, unendlich nahe an x gelegenen Werthe von x' unendlich klein wird.

Wenn jetzt der Punkt x in Ruhe gehalten wird und $J(x, x')$ für einen zweiten Punkt x' den Werth a erhält, so wird x' bei der Ruhe von x jeden Punkt einnehmen können, für den die Gleichung $J(x, x') = a$ besteht; wenigstens muss man um den Punkt x' auf diesem Gebilde ein $(n-1)$-dimensionales Gebiet so abgrenzen können, dass jeder Punkt dieses Gebietes von x' wirklich erreicht werden kann.

Wir nehmen den Punkt x' unendlich nahe bei x an und setzen $x'_\iota - x_\iota = dx_\iota$. Dadurch geht $J(x_1, \dots x_n;\ x'_1, \dots x'_n)$ über in eine Function $K(dx_1, \dots dx_n)$, in welcher $x_1, \dots x_n$ als Constanten betrachtet werden sollen, da wir nur solche Bewegungen untersuchen, bei denen dieser Punkt in Ruhe gehalten wird. Zugleich ersetzen wir die Differentiale $dx_1, \dots dx_n$ durch $s_1, \dots s_n$ und schreiben, um die Aenderungen, welche die s_ι bei einer unendlich kleinen Bewegung erleiden, in der *Lie*schen symbolischen Bezeich-

nung angeben zu können, r_ι statt $\frac{\partial f}{\partial z_\iota}$. Dann ist das Symbol einer derartigen infinitesimalen Transformation

$$(2.)\qquad \Sigma m_{\iota\varkappa} z_\iota r_\varkappa,$$

wo die Coefficienten $m_{\iota\varkappa}$ blosse Constanten sind. Da die Multiplication sämmtlicher dx^ι mit derselben Constante keine Veränderung hervorruft, so ist unter den Transformationen (2.) die $\Sigma m_{\iota\iota} z_\iota r_\iota$ auszuschliessen, und wir können voraussetzen, dass in (2.) die Summe $\Sigma m_{\iota\iota} = 0$ ist. Betrachten wir also bei den Transformationen der Gruppe nur diejenigen Aenderungen, welche bei der Ruhe eines Punktes die unendlich nahen Punkte erleiden, so lässt sich deren Gesammtheit als Untergruppe der (n^2-1)-gliedrigen Gruppe betrachten:

$$z_\iota r_\iota - z_\varkappa r_\varkappa, \quad z_\iota r_\varkappa \qquad \text{für} \qquad \iota \neq \varkappa.$$

Diese Untergruppe muss offenbar intransitiv sein; sie soll eben die Function $K(z_1, \dots z_n)$ unverändert lassen. Andererseits sieht man aber sehr leicht ein, dass, wenn durch die Gruppe eine lineare Form $\Sigma c_\iota z_\iota$ unverändert bleibt, bei jeder Bewegung, die den Punkt x in Ruhe lässt, auch ein um den Punkt liegendes unendlich kleines Gebiet in sich verschoben wird. Wenn aber mehrere solche linearen Formen vorhanden sind, so müssen mehrere derartige Gebilde, und damit auch ihr Durchschnitt, in sich bewegt werden. Wenn aber für die betrachtete Untergruppe eine lineare reelle Function der z eine Invariante ist, so muss bei der Ruhe des Punktes x ein $(n-1)$-dimensionales unendlich kleines Gebiet in sich bewegt werden; dies setzt sich weiter fort, und ein $(n-1)$-dimensionales Gebilde wird in sich bewegt. Wenn aber eine imaginäre lineare Function invariant bleibt, so muss damit ihre conjugirt complexe Form verbunden sein; deren Schnitt ist für $n>2$ reell, und wir sehen, dass ein $(n-2)$-dimensionales Gebilde in sich verschoben wird. Wenn endlich die Function $K(z_1, \dots z_n)$ nur die Variabeln $z_1, \dots z_m$ enthält, aber $z_{m+1}, \dots z_n$ für $m<n$ nicht vorkommen, so wird das Gebilde $z_1 = z_2 = \cdots = z_m = 0$ in sich verschoben.

Demnach können wir für $n>2$ folgende Bedingungen aufstellen:

Die Gruppe, durch welche die unendlich kleinen Grössen $dx_1, \dots dx_n$ transformirt werden, muss eine und zwar eine einzige Invariante zwischen den Coordinaten eines jeden Punktes besitzen; in dieser Invariante darf für $n>2$ kein linearer Factor vorkommen; zugleich müssen in derselben alle n Variabeln wesentlich sein.

Den zweidimensionalen Raum wollen wir erst später behandeln; für einen mehrdimensionalen mögen die unendlich nahen Punkte durch folgende infinitesimale Transformationen verändert werden:

$$(3.)\qquad \Sigma m_{\iota\varkappa} z_\iota r_\varkappa, \quad \Sigma m'_{\iota\varkappa} z_\iota r_\varkappa, \quad \ldots .$$

Dann muss die Invariante K den Gleichungen genügen:

$$(4.)\qquad \Sigma m_{\iota\varkappa} z_\iota \frac{\partial K}{\partial z_\varkappa} = 0, \quad \Sigma m'_{\iota\varkappa} z_\iota \frac{\partial K}{\partial z_\varkappa} = 0, \quad \ldots .$$

Diese Ausdrücke müssen so beschaffen sein, dass sich alle ihre Ableitungen durch eine einzige ausdrücken lassen, weil wir im andern Falle mehrere Invarianten erhalten würden. Da zudem keine dieser Ableitungen verschwindet, muss es möglich sein, alle durch $\frac{\partial K}{\partial z_1}$ auszudrücken, und es bestehen die Gleichungen:

$$(5.)\qquad \frac{\partial K}{\partial z_2} = P_2 \cdot \frac{\partial K}{\partial z_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial K}{\partial z_n} = P_n \cdot \frac{\partial K}{\partial z_1},$$

wo die $P_2, \ldots P_n$ nicht blosse Constanten sein können.

Das System (5.) von Gleichungen ist wesentlich identisch mit dem System (4.) und aus letzterem durch blosse Elimination erhalten. Somit kommen auch unter den Gleichungen (4.) $n-1$ von einander unabhängige vor, und die Zahl der von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen (3.) ist mindestens gleich $n-1$. Wendet man dieselbe Elimination, welche von (4.) zu (5.) führt, auf die Symbole (3.) an, so muss man auf Symbole $r_\varkappa - P_\varkappa r_1$ für $\varkappa = 2, \ldots n$ gelangen, und die Symbole $Q_\varkappa r_\varkappa - P_\varkappa Q_\varkappa r_1$ müssen nach passender Bestimmung der $Q_\varkappa$ wiederum unendlich kleine Bewegungen darstellen, welche sich aus (3.) zusammensetzen lassen. Diese schreiben wir in der Form

$$(6.)\qquad \varphi_{21} r_2 - \varphi_{12} r_1, \quad \varphi_{31} r_3 - \varphi_{13} r_1, \quad \ldots, \quad \varphi_{n1} r_n - \varphi_{1n} r_1,$$

wo die $\varphi_{\iota\varkappa}$ lineare Functionen sind. Je zwei Functionen $\varphi_{1\varkappa}$ und $\varphi_{\varkappa 1}$ dürfen nicht durch Multiplication mit einem constanten Factor in einander übergeführt werden können.

Nach der in § 9 Gleichung (2.) gegebenen Vorschrift combiniren wir jetzt die Transformationen $\varphi_{21} r_2 - \varphi_{12} r_1$ und $\varphi_{31} r_3 - \varphi_{13} r_1$. Die neue unendlich kleine Transformation muss sich linear durch die Transformationen (3.) und somit durch die Transformationen (6.) und die etwa weiter vorhandenen darstellen lassen. Da bei der Combination $(\varphi_{21} r_2 - \varphi_{12} r_1, \varphi_{31} r_3 - \varphi_{13} r_1)$ die $r_4, \ldots r_n$ nicht vorkommen, so muss dieselbe sich entweder linear durch

$\varphi_{21}r_2 - \varphi_{12}r_1$ und $\varphi_{31}r_3 - \varphi_{13}r_1$ allein darstellen lassen, oder es muss noch eine Transformation $M_1r_1 + M_2r_2 + M_3r_3$ hinzukommen, welche sich auf die Form $\varphi_{23}r_2 - \varphi_{32}r_3$ muss zurückführen lassen.

Betrachten wir zunächst den ersten Fall, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varphi_{21}\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_2} - \varphi_{12}\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_1} - \varphi_{31}\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_3} + \varphi_{13}\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_1} &= \alpha\varphi_{12} + \beta\varphi_{13}, \\
-\varphi_{31}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial x_3} + \varphi_{13}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial x_1} &= \alpha\varphi_{21}, \\
\varphi_{21}\frac{\partial\varphi_{31}}{\partial x_2} - \varphi_{12}\frac{\partial\varphi_{31}}{\partial x_1} &= \beta\varphi_{31},
\end{aligned}$$

von denen mindestens zwei unabhängig sind, so dass wir φ_{31} und φ_{13} linear durch φ_{12} und φ_{21} ausdrücken können. Würde die Gruppe durch die $n-1$ infinitesimalen Transformationen (6.) bestimmt, so würden sich alle $\varphi_{\varkappa 1}$ und $\varphi_{1\varkappa}$ durch φ_{12} und φ_{21} darstellen lassen; somit müsste für $\varphi_{12} = \varphi_{21} = 0$ keine Bewegung möglich sein, was ausgeschlossen ist.

Ausser den beiden ersten Transformationen (6.) möge jetzt eine Transformation $\varphi_{23}p_2 - \varphi_{32}p_3$ vorkommen. Dann ergeben sich die Gleichungen:

$$\varphi_{23} = \alpha\varphi_{13} + \beta\varphi_{31} + \gamma\varphi_{21}, \quad \varphi_{32} = \varkappa\varphi_{12} + \lambda\varphi_{21} + \mu\varphi_{31},$$

. . . .

aus denen unmittelbar die einfacheren folgen:

$$(7.) \quad \begin{cases} a\ \varphi_{13} = b\ \varphi_{23} + c\ \varphi_{32} \\ a'\ \varphi_{21} = b'\ \varphi_{31} + c'\ \varphi_{13} \\ a''\varphi_{32} = b''\varphi_{12} + c''\varphi_{21} \end{cases} \left| \begin{array}{l} a\ \varphi_{12} = p\ \varphi_{23} + q\ \varphi_{32} \\ a'\ \varphi_{23} = p'\ \varphi_{31} + q'\ \varphi_{13} \\ a''\varphi_{31} = p''\varphi_{12} + q''\varphi_{21}, \end{array} \right.$$

wo die a, a', a'' nicht verschwinden und deshalb gleich Eins gesetzt werden können. Setzt man die Werthe aus den ersten Gleichungen in die dritte Gleichung links und in die zweite Gleichung rechts, so würden sich alle sechs Functionen durch φ_{23} und φ_{32} darstellen lassen, wenn nicht c'' und p' verschwinden. Diese Erwägung zeigt, dass c, c', c'' und p, p', p'' verschwinden. In diesem Falle lassen sich die sechs Functionen durch drei darstellen.

Hiernach sind von den sechs linearen Ausdrücken $\varphi_{1\varkappa}, \varphi_{1\lambda}, \varphi_{\varkappa 1}, \varphi_{\lambda 1}, \varphi_{\varkappa\lambda}, \varphi_{\lambda\varkappa}$ höchstens drei von einander unabhängig, und zwar unter den beiden Bedingungen, dass 1) auch $\varphi_{\varkappa\lambda}r_\varkappa - \varphi_{\lambda\varkappa}r_\lambda$ eine von $\varphi_{1\varkappa}r_1 - \varphi_{\varkappa 1}r_\varkappa$ und $\varphi_{1\lambda}r_1 - \varphi_{\lambda 1}r_\lambda$ unabhängige Transformation ist, und dass 2) $\varphi_{\iota\lambda}$ und $\varphi_{\varkappa\lambda}$ sich nur durch

sionalen Gebilde; bei der Ruhe von x' und x'' muss x auf den beiden Gebilden $J(x, x') = a$, $J(x, x'') = a'$ bleiben. Da diese aber bei beliebiger Lage von x und x' kein $(n-1)$-dimensionales Gebilde gemeinschaftlich haben, so ist die Bewegung auf ein Gebilde von $n-2$ Dimensionen beschränkt. Indem wir dieselbe Betrachtung auf mehr Punkte übertragen, erhalten wir den Satz:

In den eigentlichen Raumformen von n Dimensionen verbleibt bei der Ruhe eines Punktes jeder andere auf einem $(n-1)$-dimensionalen Gebilde, bei der Ruhe zweier Punkte auf einem Gebilde von $n-2$, bei der Ruhe dreier Punkte von $n-3$ Dimensionen u. s. w., und ist bei der Ruhe von n Punkten keine Bewegung möglich, wofern die gegenseitige Lage der Punkte nicht besonderen Bedingungen genügt.

Gehen wir wieder zu den infinitesimalen Transformationen (3.) resp. (5.) zurück. Wir haben gesehen, dass wir denselben die symbolische Form $L_\iota r_\varkappa - L_\varkappa r_\iota$ geben konnten, wo die $L_1, \dots L_n$ lineare homogene Functionen von $z_1, \dots z_n$ sind. Aus der Gleichung:

$$(r_\iota L_\varkappa - r_\varkappa L_\iota,\ r_\iota L_\lambda - r_\lambda L_\iota) = k(r_\varkappa L_\lambda - r_\lambda L_\varkappa) + k'(r_\lambda L_\iota - r_\iota L_\lambda) + k''(r_\iota L_\varkappa - r_\varkappa L_\iota)$$

folgt: $\dfrac{\partial L_\varkappa}{\partial z_\lambda} = \dfrac{\partial L_\lambda}{\partial z_\varkappa}$, oder die $L_1, \dots L_n$ sind die Differentialquotienten einer quadratischen Form nach $z_1, \dots z_n$, und da $L_\iota \dfrac{\partial K}{\partial z_\varkappa} - L_\varkappa \dfrac{\partial K}{\partial z_\iota} = 0$ ist, so muss K eine Function dieser Form sein und kann ihr geradezu gleichgesetzt werden. Daraus folgt der Satz:

Wenn eine homogene lineare Gruppe von n Veränderlichen kein ebenes Gebilde in Ruhe lässt oder in sich verschiebt, so ist sie entweder transitiv, oder der Raum zerlegt sich in quadratische Gebilde, von denen jedes in sich bewegt wird.

Stellt man die quadratische Form $K(z_1, \dots z_n)$ in der Form von n Quadraten dar, so müssen im vorliegenden Falle alle Quadrate dasselbe Zeichen haben; demnach ergiebt sich:

Die Invariante $J(x_1, \dots x_n,\ x'_1, \dots x'_n)$, welche unter den gestellten Bedingungen für die Coordinaten zweier Punkte besteht, geht für $x'_\iota = x_\iota + dx_\iota$ über in eine beständig positive Form von $dx_1, \dots dx_n$, in welcher alle n Differentiale wesentlich sind, und deren Coefficienten noch die $x_1, \dots x_n$ enthalten können.

Die $\dfrac{n(n-1)}{2}$ infinitesimalen Transformationen, durch welche diejenige Gruppe bestimmt wird, welche die Bewegung bei der Ruhe des Punktes x

angiebt, lassen sich so wählen, dass man für $\iota, \varkappa = 1, \ldots n$ setzen kann:

$$X_{\iota\varkappa}f = (x'_\iota - x_\iota)p_\varkappa - (x'_\varkappa - x_\varkappa)p_\iota + \cdots,$$

wo noch höhere Potenzen von $x'_1 - x_1, \ldots x'_n - x_n$ hinzukommen. Bildet man deren Combination, so muss sich die dadurch dargestellte Transformation homogen linear durch die vorhandenen ausdrücken lassen. Da sich aber diese Ausdrücke bereits aus den linearen Gliedern ergeben, so folgt:

In allen n-dimensionalen eigentlichen Raumformen haben die Untergruppen, durch welche alle bei der Ruhe eines Punktes möglichen Bewegungen dargestellt werden, stets dieselbe Zusammensetzung. Man kann zu ihrer Bestimmung $\frac{n(n-1)}{2}$ *infinitesimale Transformationen* $X_{\iota\varkappa}f$ *für* $X_{\iota\varkappa} + X_{\varkappa\iota} = 0$ *so wählen, dass für ungleiche Marken* $\iota, \varkappa, \lambda, \mu$ *die Relationen bestehen:*

$$(X_{\iota\varkappa}X_{\varkappa\lambda}) = X_{\iota\lambda}, \quad (X_{\iota\varkappa}X_{\lambda\mu}) = 0.$$

§ 11.

Der Differentialausdruck zweiten Grades.

Wenn der Punkt x in Ruhe gehalten und um denselben eine Bewegung ausgeführt wird, so bleibt eine quadratische Form $\Sigma a_{\iota\varkappa} dx_\iota dx_\varkappa$ ungeändert, wo die $a_{\iota\varkappa}$ Functionen von $x_1, \ldots x_n$ sind. Gelangt aber durch irgend eine starre Bewegung des Raumes der Punkt x in einen Punkt x', so muss die Form $\Sigma a_{\iota\varkappa} dx_\iota dx_\varkappa$ in die entsprechende Form $\Sigma a'_{\iota\varkappa} dx'_\iota dx'_\varkappa$ übergehen. Diese Eigenschaft soll uns dazu führen, den Differentialausdruck genauer kennen zu lernen. Wir benutzen wieder eine unendlich kleine Bewegung und wählen als ihr Symbol

$$Xf = \Sigma \xi_\varrho \frac{\partial f}{\partial x_\varrho}.$$

Damit hierdurch die quadratische Form nicht geändert wird, müssen die $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen befriedigt sein:

$$(1.) \qquad \sum_\varrho \left(\frac{\partial a_{\iota\varkappa}}{\partial x_\varrho} \xi_\varrho + a_{\iota\varrho} \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\varkappa} + a_{\varkappa\varrho} \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\iota} \right) = 0,$$

wo, wie stets im Folgenden, die zu benutzenden Marken die Zahlen $1, \ldots n$ bezeichnen und eine Summation auch stets auf diese Zahlen ausgedehnt werden soll.

Die weitere Untersuchung bietet grosse Aehnlichkeit mit denen der Herren *Christoffel* und *Lipschitz* über Differentialausdrücke zweiten Grades;

namentlich ergeben sich die von diesen Herren benutzten Abkürzungen hier mit hervortretender Nothwendigkeit; für dieselben benutzen wir die Bezeichnung des Herrn *Christoffel*.

Die Gleichung (1.) wird nach x_λ differentiirt und liefert dann:

$$\sum_\varrho \Big(\frac{\partial^2 a_{\iota\varkappa}}{\partial x_\lambda \partial x_\varrho} \xi_\varrho + \frac{\partial a_{\iota\varkappa}}{\partial x_\varrho} \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial a_{\iota\varrho}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\varkappa} + \frac{\partial a_{\varkappa\varrho}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\iota}$$
$$+ a_{\iota\varrho} \frac{\partial^2 \xi_\varrho}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda} + a_{\varkappa\varrho} \frac{\partial^2 \xi_\varrho}{\partial x_\iota \partial x_\lambda} \Big) = 0.$$

Da hier die partiellen Differentialquotienten von ξ_ϱ sowohl nach $x_\varkappa$ und x_λ, wie nach x_ι und x_λ vorkommen, so bilde man einmal die Gleichung (1.) für ι und λ und differentiire nach $x_\varkappa$, und dann für die Marken $\varkappa$ und λ und differentiire nach x_ι. Indem wir die beiden letzten dieser Gleichungen addiren und die erste subtrahiren, erhalten wir eine Gleichung, in welcher nur die zweite Ableitung von ξ_ϱ nach x_ι und $x_\varkappa$ vorkommt. Um dieselbe bequem schreiben zu können, benutzen wir die Abkürzungen:

$$(2.) \qquad 2\begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \lambda\end{bmatrix} = \frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial x_\iota} + \frac{\partial a_{\iota\lambda}}{\partial x_\varkappa} - \frac{\partial a_{\iota\varkappa}}{\partial x_\lambda},$$

woraus weiter folgt:

$$(3.) \qquad \frac{\partial a_{\iota\varkappa}}{\partial x_\lambda} = \begin{bmatrix}\lambda\iota\\ \varkappa\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\lambda\varkappa\\ \iota\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varkappa\iota\\ \lambda\end{bmatrix}.$$

Jetzt erhalten wir folgende Gleichung:

$$(4.) \quad \sum_\varrho \Big(\xi_\varrho \frac{\partial \begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \lambda\end{bmatrix}}{\partial x_\varrho} + \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\iota} \begin{bmatrix}\varrho\varkappa\\ \lambda\end{bmatrix} + \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\varkappa} \begin{bmatrix}\varrho\iota\\ \lambda\end{bmatrix} + \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_\lambda} \begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \varrho\end{bmatrix} + a_{\lambda\varrho} \frac{\partial^2 \xi_\varrho}{\partial x_\iota \partial x_\varkappa} \Big) = 0.$$

Wir erinnern daran, dass in der quadratischen Form $\Sigma a_{\iota\varkappa} dx_\iota dx_\varkappa$ alle n Differentiale wesentlich sind, dass also die Determinante $|a_{\iota\varkappa}| = A$ nicht identisch verschwindet. In dieser Determinante bezeichnen wir den Coefficienten von $a_{\iota\varkappa}$ mit $A_{\iota\varkappa}$, so dass die Gleichungen bestehen:

$$\sum_\varrho a_{\iota\varrho} A_{\iota\varrho} = A, \quad \sum_\varrho a_{\iota\varrho} A_{\varkappa\varrho} = 0 \quad \text{für} \quad \iota \neq \varkappa.$$

Hiernach können wir aus (4.) den Werth jedes zweiten Differentialquotienten von ξ_ϱ vermittelst der ξ_ϱ und ihrer ersten Differentialquotienten ausdrücken. Mit Herrn *Christoffel* führen wir noch die Bezeichnung ein:

$$(5.) \qquad \sum_\varrho \begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \varrho\end{bmatrix} \frac{A_{\varrho\lambda}}{A} = \begin{Bmatrix}\iota\varkappa\\ \lambda\end{Bmatrix},$$

ersetzen in (4.) den Buchstaben λ durch σ, multipliciren mit $\frac{A_{\sigma a}}{A}$ und

summiren auch nach σ; dann folgt:

$$(6.)\quad \frac{\partial^2\xi_\alpha}{\partial x_\iota\partial x_\varkappa} = -\sum_{\varrho\sigma}\left(\xi_\varrho\frac{A_{\sigma\alpha}}{A}\frac{\partial\begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \sigma\end{bmatrix}}{\partial x_\varrho} + \frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\iota}\begin{Bmatrix}\varrho\varkappa\\ \alpha\end{Bmatrix} + \frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\varkappa}\begin{Bmatrix}\varrho\iota\\ \alpha\end{Bmatrix} + \frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\sigma}\begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \varrho\end{bmatrix}\frac{A_{\sigma\alpha}}{A}\right).$$

Ich differentiire (4.) nach x_μ und erhalte eine Gleichung, in welcher ausser den ξ_ϱ, ihren ersten und zweiten Ableitungen noch

$$(7.)\qquad \sum_\varrho a_{\lambda\varrho}\frac{\partial^3\xi_\varrho}{\partial x_\iota\partial x_\varkappa\partial x_\mu}$$

vorkommt. Nun vertausche ich in (4.) die Marken $\varkappa$ und μ und differentiire dann nach $x_\varkappa$. In der neuen Gleichung kommen die dritten Differentialquotienten nur in der Verbindung (7.) vor. Wenn die so gebildeten Gleichungen von einander subtrahirt werden, nimmt das Resultat unter Anwendung der Gleichungen (3.) die Gestalt an:

$$\begin{aligned}
&\sum_\varrho \xi_\varrho\frac{\partial}{\partial x_\varrho}\left(\frac{\partial\begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \lambda\end{bmatrix}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\begin{bmatrix}\iota\mu\\ \lambda\end{bmatrix}}{\partial x_\varkappa}\right) + \frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\iota}\left(\frac{\partial\begin{bmatrix}\varrho\varkappa\\ \lambda\end{bmatrix}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\begin{bmatrix}\varrho\mu\\ \lambda\end{bmatrix}}{\partial x_\varkappa}\right)\\
&+\frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial\begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \varrho\end{bmatrix}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\begin{bmatrix}\iota\mu\\ \varrho\end{bmatrix}}{\partial x_\varkappa}\right) + \frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\varkappa}\left(\frac{\partial\begin{bmatrix}\iota\varrho\\ \lambda\end{bmatrix}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\begin{bmatrix}\iota\mu\\ \lambda\end{bmatrix}}{\partial x_\varrho}\right) + \frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \lambda\end{bmatrix}}{\partial x_\varrho} - \frac{\partial\begin{bmatrix}\iota\varrho\\ \lambda\end{bmatrix}}{\partial x_\varkappa}\right)\\
&+\sum_\tau\left(\frac{\partial^2\xi_\tau}{\partial x_\iota\partial x_\varkappa}\begin{bmatrix}\lambda\mu\\ \tau\end{bmatrix} - \frac{\partial^2\xi_\tau}{\partial x_\iota\partial x_\mu}\begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \tau\end{bmatrix} - \frac{\partial^2\xi_\tau}{\partial x_\varkappa\partial x_\lambda}\begin{bmatrix}\iota\mu\\ \tau\end{bmatrix} + \frac{\partial^2\xi_\tau}{\partial x_\lambda\partial x_\mu}\begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \tau\end{bmatrix}\right) = 0,
\end{aligned}$$

wo in den vier letzten Summen der Summations-Buchstabe ϱ durch τ ersetzt worden ist. Diese Vertauschung ist angebracht, um einfacher die aus (6.) folgenden Werthe für die zweiten Differentialquotienten einsetzen zu können. Geschieht das, so erhalten wir als Coefficienten von $\frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\iota}$, $\frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\lambda}$, $\frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\varkappa}$, $\frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\mu}$ Ausdrücke, welche ganz gleichmässig gebildet sind. Wir werden dadurch zu der bekannten Abkürzung geführt:

$$(8.)\quad (\iota\lambda\varkappa\mu) = \frac{\partial\begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \lambda\end{bmatrix}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\begin{bmatrix}\iota\mu\\ \lambda\end{bmatrix}}{\partial x_\varkappa} + \sum_{\sigma\tau}\frac{A_{\sigma\tau}}{A}\left(\begin{bmatrix}\iota\mu\\ \sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \tau\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\mu\\ \tau\end{bmatrix}\right).$$

Ausserdem setzen wir für den Augenblick:

$$P_\varrho = \frac{\partial}{\partial x_\varrho}\left(\frac{\partial\begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \lambda\end{bmatrix}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\begin{bmatrix}\iota\mu\\ \lambda\end{bmatrix}}{\partial x_\varkappa}\right) + \sum_{\sigma\tau}\frac{A_{\sigma\tau}}{A}\frac{\partial}{\partial x_\varrho}\left(\begin{bmatrix}\iota\mu\\ \sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \tau\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\mu\\ \tau\end{bmatrix}\right)$$

und erhalten:

$$(9.)\quad \begin{cases} \sum_{\varrho}\left(\xi_\varrho P_\varrho+\frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\iota}(\varrho\lambda\varkappa\mu)+\frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\lambda}(\iota\varrho\varkappa\mu)+\frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\varkappa}(\iota\lambda\varrho\mu)+\frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\mu}(\iota\lambda\varkappa\varrho)\right) \\ -\sum_{\varrho\sigma\tau}\frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\sigma}\frac{A_{\sigma\tau}}{A}\left(\begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \varrho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\mu\\ \tau\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\iota\mu\\ \varrho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \tau\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \varrho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\iota\mu\\ \tau\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda\mu\\ \varrho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \tau\end{bmatrix}\right) = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichung ist einer bedeutenden Vereinfachung fähig, zu der wir auf folgendem Wege gelangen:

Da $\sum_\tau a_{\iota\tau}\frac{A_{\varkappa\tau}}{A} = 1$ oder 0 ist, wird der Differentialquotient nach jedem x_ϱ gleich Null; also besteht die Gleichung:

$$\sum_{\tau\varrho}\left(a_{\iota\tau}\frac{\partial\frac{A_{\varkappa\tau}}{A}}{\partial x_\varrho}\xi_\varrho+\frac{A_{\varkappa\tau}}{A}\frac{\partial a_{\iota\tau}}{\partial x_\varrho}\xi_\varrho\right) = 0.$$

Indem ich in der zweiten Summe deren Werth aus (1.) einsetze, folgt:

$$\sum_{\tau\varrho}\left(a_{\iota\tau}\frac{\partial\frac{A_{\varkappa\tau}}{A}}{\partial x_\varrho}\xi_\varrho-\frac{A_{\varkappa\tau}}{A}a_{\iota\varrho}\frac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\tau}-\frac{\partial\xi_\varkappa}{\partial x_\iota}\right) = 0.$$

Hier ersetze ich die Marke ι durch σ, multiplicire mit $\frac{A_{\sigma\lambda}}{A}$ und summire nach σ; wenn ich dann noch in der zweiten Summe den Summationsbuchstaben τ und in der dritten σ durch ϱ ersetze, erhalte ich folgende Gleichung:

$$(10.)\qquad \sum_{\varrho}\left(\xi_\varrho\frac{\partial\frac{A_{\varkappa\lambda}}{A}}{\partial x_\varrho}-\frac{A_{\varkappa\varrho}}{A}\frac{\partial\xi_\lambda}{\partial x_\varrho}-\frac{A_{\lambda\varrho}}{A}\frac{\partial\xi_\varkappa}{\partial x_\varrho}\right) = 0,$$

welche auch an sich durch ihre Aehnlichkeit mit (1.) einiges Interesse beanspruchen dürfte.

Hier möge in den beiden letzten Summen der Buchstabe ϱ durch σ ersetzt, dann an Stelle von $\varkappa$ und λ neue Summationsbuchstaben eingeführt und mit

$$\begin{bmatrix}\iota\mu\\ \sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \tau\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\mu\\ \tau\end{bmatrix}$$

multiplicirt werden; dadurch erhält in (9.) die nach ϱ, σ, τ gebildete Summe die Form:

$$-\sum_{\varrho\sigma\tau}\xi_\varrho\frac{\partial\frac{A_{\sigma\tau}}{A}}{\partial x_\varrho}\left(\begin{bmatrix}\iota\mu\\ \sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varkappa\lambda\\ \tau\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\iota\varkappa\\ \sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\mu\\ \tau\end{bmatrix}\right),$$

und die Gleichung (9.) nimmt folgende einfache Gestalt an:

$$(11.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\varrho}\Big[\xi_\varrho \dfrac{\partial(\iota\lambda\varkappa\mu)}{\partial x_\varrho}+\dfrac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\iota}(\varrho\lambda\varkappa\mu)+\dfrac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\lambda}(\iota\varrho\varkappa\mu) \\ \qquad\qquad +\dfrac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\varkappa}(\iota\lambda\varrho\mu)+\dfrac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\mu}(\iota\lambda\varkappa\varrho)\Big] = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichung, welche aus (1.) durch Entwicklung der Integrabilitätsbedingungen erhalten ist, zeigt in ihrer äusseren Form grosse Aehnlichkeit mit einer Gleichung, welche aus mehreren Gleichungen (1.) durch blosse Addition und Multiplication erhalten wird. Multipliciren wir nämlich die Gleichung (1.) mit $a_{\lambda\mu}$, bilden dann die Gleichung (1.) für die Marken λ und μ, und multipliciren mit $a_{\iota\varkappa}$, addiren diese Gleichungen und subtrahiren zwei ähnlich gebildete, so gelangen wir zu einer Gleichung, deren Aehnlichkeit mit (11.) dann besonders deutlich hervortritt, wenn wir die Abkürzung einführen:

$$(12.)\qquad [\iota\lambda\varkappa\mu] = a_{\iota\varkappa}a_{\lambda\mu}-a_{\iota\mu}a_{\lambda\varkappa}.$$

Dann wird die neue Gleichung:

$$(13.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\varrho}\Big[\xi_\varrho \dfrac{\partial[\iota\lambda\varkappa\mu]}{\partial x_\varrho}+\dfrac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\iota}[\varrho\lambda\varkappa\mu]+\dfrac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\lambda}[\iota\varrho\varkappa\mu] \\ \qquad\qquad +\dfrac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\varkappa}[\iota\lambda\varrho\mu]+\dfrac{\partial\xi_\varrho}{\partial x_\mu}[\iota\lambda\varkappa\varrho]\Big] = 0. \end{cases}$$

Die Vergleichung der Gleichungen (11.) und (13.) legt die Vermuthung nahe, dass für je vier Marken die Gleichung besteht:

$$(14.)\qquad (\iota\lambda\varkappa\mu) = M.[\iota\lambda\varkappa\mu],$$

wo M eine Constante bezeichnet. Ehe wir dazu übergehen, die Berechtigung dieser Vermuthung zu prüfen, erinnern wir an die Beziehungen, welche die Herren *Christoffel* und *Lipschitz* für die Ausdrücke $(\iota\lambda\varkappa\mu)$ aufgestellt haben. Diese werden durch die vier Gleichungen gegeben:

$$(15.)\quad \begin{cases} (\iota\lambda\varkappa\mu) = -(\lambda\iota\varkappa\mu), \\ (\iota\lambda\varkappa\mu) = -(\iota\lambda\mu\varkappa), \\ (\iota\lambda\varkappa\mu) = (\varkappa\mu\iota\lambda), \\ (\iota\lambda\varkappa\mu)+(\iota\varkappa\mu\lambda)+(\iota\mu\lambda\varkappa) = 0. \end{cases}$$

Dieselben Beziehungen bestehen zwischen den durch (12.) definirten Grössen $[\iota\lambda\varkappa\mu]$.

Wir beweisen zunächst die Richtigkeit der Gleichung (14.), indem wir die Ausdrücke $(\iota\lambda\varkappa\mu)$ und $[\iota\lambda\varkappa\mu]$ für denselben festgewählten Punkt allgemeiner Lage bilden und zeigen, dass M sich nicht ändert, wenn man die

Marken ι, λ, $\varkappa$, μ durch irgend vier andere Marken ersetzt. Zu dem Ende gehen wir auf die Gleichung (11.) zurück und berücksichtigen, dass wir im vorigen Paragraphen für $\frac{n(n-1)}{2}$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen die Anfangsglieder der einzelnen Componenten kennen gelernt haben. Lassen wir den Punkt x^0 in Ruhe, bezeichnen die Werthe, welche die $a_{\iota\varkappa}$ für diesen Punkt annehmen, mit $a^0_{\iota\varkappa}$, so entwickeln wir die Componenten $\xi_1, \dots \xi_n$ nach Potenzen von $x_1-x_1^0, \dots x_n-x_n^0$. Eine Transformation $X_{\alpha\beta}f$ hat dann nur in den Componenten ξ_α und ξ_β Glieder ersten Grades, und in allen andern nur solche zweiter und höherer Grade; wir erhalten:

$$\xi_\alpha = \sum_\sigma a^0_{\beta\sigma}(x_\sigma - x^0_\sigma) + \cdots, \quad \xi_\beta = \sum_\sigma a^0_{\alpha\sigma}(x_\sigma - x^0_\sigma) + \cdots,$$

während bei einem von α und β verschiedenen γ jedes ξ_γ mit Gliedern zweiter Ordnung beginnt. Diese Werthe von $\xi_1, \dots \xi_n$ setzen wir in die Gleichung (11.) und lassen dann $x_\sigma = x^0_\sigma$ werden. Dadurch verschwindet jedes ξ_ϱ; $\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\iota}$ wird $a^0_{\beta\iota}$ u. s. w. Zugleich haben wir auch in die Ausdrücke für $(\varrho\lambda\varkappa\mu)$ u. s. w. den Werth $x^0_\sigma = x_\sigma$ einzusetzen. Der erhaltene Werth gilt dann aber für jedes x^0, und wir können somit die obere Marke weglassen. Dadurch gelangen wir zu der Gleichung:

$$(16.)\quad \begin{cases} a_{\beta\iota}(\alpha\lambda\varkappa\mu) - a_{\alpha\iota}(\beta\lambda\varkappa\mu) + a_{\beta\lambda}(\iota\alpha\varkappa\mu) - a_{\alpha\lambda}(\iota\beta\varkappa\mu) \\ + a_{\beta\varkappa}(\iota\lambda\alpha\mu) - a_{\alpha\varkappa}(\iota\lambda\alpha\mu) + a_{\beta\mu}(\iota\lambda\varkappa\alpha) - a_{\alpha\mu}(\iota\lambda\varkappa\beta) = 0. \end{cases}$$

Die vorstehende Gleichung wird keine Beziehung der $(\iota\lambda\varkappa\mu)$ und $a_{\iota\varkappa}\dots$ angeben, wenn $\alpha=\beta$, oder wenn $\iota=\lambda$, oder wenn $\varkappa=\mu$ ist. Für $\iota=\varkappa$, $\lambda=\mu$ erhalten wir aus (6.):

$$(16^a.)\quad a_{\beta\iota}(\alpha\lambda\iota\lambda) - a_{\alpha\iota}(\beta\lambda\iota\lambda) + a_{\beta\lambda}(\iota\alpha\iota\lambda) - a_{\alpha\lambda}(\iota\beta\iota\lambda) = 0,$$

und für $\iota=\varkappa$:

$$(16^b.)\quad \begin{cases} a_{\beta\iota}[(\alpha\lambda\iota\mu) + (\iota\lambda\alpha\mu)] - a_{\alpha\iota}[(\beta\lambda\iota\mu) + (\iota\lambda\beta\mu)] \\ + a_{\beta\lambda}(\iota\alpha\iota\mu) - a_{\alpha\lambda}(\iota\beta\iota\mu) + a_{\beta\mu}(\iota\lambda\iota\alpha) - a_{\alpha\mu}(\iota\lambda\iota\beta) = 0. \end{cases}$$

In der Gleichung (16.) beschränke ich mich zunächst auf drei verschiedene Marken, als welche ich 1, 2, 3 wähle. In (16^a.) setze ich $\alpha=2$, $\beta=3$, $\iota=2$, $\lambda=1$ und erhalte:

$$(\alpha.)\quad a_{32}(1212) - a_{22}(1213) - a_{12}(2321) = 0.$$

Indem ich diese Gleichung mit a_{33} und die aus ihr durch Vertauschung von

2 und 3 sich ergebende mit a_{22} multiplicire, erhalte ich:

$$(\beta.) \qquad a_{23}[a_{33}(1212)-a_{22}(1313)]-a_{12}a_{33}(2321)-a_{13}a_{22}(2331) = 0.$$

In (16^b.) setze ich $\iota=1$, $\lambda=2$, $\mu=3$, $\alpha=2$, $\beta=3$; dann erhalte ich eine Gleichung, aus der in Verbindung mit den durch Erhöhung der Marken erhaltenen unmittelbar folgt:

$$a_{11}(2323)+a_{23}(1213) = a_{22}(3131)+a_{31}(2321) = \cdots.$$

Hiernach kann ich aus (β.) die eckige Klammer wegschaffen und erhalte:

$$(2321) = M[2321], \quad (3132) = M[3132],$$

und demnach auch $(1213) = M[1213]$. Diese Werthe in (α.) eingesetzt, folgen die entsprechenden Formeln für (1212), (2323), (3131).

Hier ist aber nur bewiesen, dass M sich unter Beibehaltung der drei Marken 1, 2, 3 nicht ändert. Wendet man aber die obigen Gleichungen auf die Marken 1, 2, 4 an, so folgt unter anderm:

$$(1212) = M'[1212], \quad (1414) = M'[1414],$$

also wenn nicht (1212) und [1212] beide verschwinden, $M=M'$. Dasselbe Resultat erhält man aber auch, wenn man die vier Marken α, β, ι, λ in (16^a.) in beliebiger Reihenfolge gleich 1, 2, 3, 4 setzt. Wollte man aber in (16.) die ι, λ, $\varkappa$, $\mu = 1$, 2, 3, 4 setzen, so gelangt man nicht zu neuen Resultaten. Wählt man aber etwa in (16^b.) $\alpha=1$, $\beta=2$, $\iota=3$, $\lambda=2$, $\mu=4$, so folgt:

$$(1234)+(1432) = M\{[1234]+[1432]\}.$$

Somit ist

$$(\gamma.) \qquad (1234) = M[1234]+Q, \quad (1432) = M[1432]-Q.$$

Nun ist nach (15.)

$$(1234)-(1432) = (1234)+(1423) = -(1342);$$

demnach

$$(1342) = M[1342]-2Q,$$

woraus entsprechend den Gleichungen (γ.) folgt:

$$(1243) = M[1243]+2Q,$$

während die erste Gleichung (γ.) liefert:

$$(1243) = M[1243]-Q,$$

sodass $Q=0$ sein muss.

Wir haben jetzt nur noch zu zeigen, dass sich M auch bei Hinzunahme weiterer Marken nicht ändert. Diesen Nachweis übersieht man sehr leicht, und man erhält ganz allgemein:

$$(\iota\lambda\varkappa\mu) = M(x).[\iota\lambda\varkappa\mu].$$

Multiplicirt man die Gleichung (13.) mit $M(x)$ und subtrahirt sie von (11.), so folgt:

$$\Sigma\xi_\varrho \frac{\partial M(x)}{\partial x_\varrho} = 0.$$

Hier darf man für $\xi_1, \dots \xi_n$ die Componenten irgend einer in der Raumform möglichen unendlich kleinen Bewegung setzen. Bestände also die vorstehende Gleichung für ein veränderliches $M(x)$, so bliebe dies bei allen Transformationen der Gruppe invariant, und die Gruppe wäre intransitiv. Da das unmöglich ist, muss M eine blosse Constante sein.

Da die Grössen $a_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta}-a_{\alpha\delta}a_{\gamma\beta}$, welche wir der Kürze wegen mit $[\alpha\gamma\beta\delta]$ bezeichnet haben, nicht sämmtlich verschwinden können, so muss die Constante M endlich sein. Wir haben die drei Fälle zu unterscheiden, dass M gleich Null, positiv und negativ ist. Im Falle $M=0$ verschwinden alle Ausdrücke $(\iota\lambda\varkappa\mu)$ identisch. Dann hat Herr *Lipschitz* nachgewiesen, dass sich die Form $\Sigma a_{\iota\varkappa}dx_\iota dx_\varkappa$ in eine solche mit constanten Coefficienten verwandeln lässt. Wir können also die Coordinaten so wählen, dass die Form wird Σdx_ι^2. Soll diese Form bei der Transformation $\delta x_\varkappa = \delta t.F_\varkappa(x)$ ungeändert bleiben, so muss sein:

$$\Sigma dx_\iota.dF_\varkappa = \sum_{\iota\varkappa} dx_\iota\cdot\frac{\partial F_\iota}{\partial x_\varkappa}dx_\varkappa = 0,$$

also

$$\frac{\partial F_\iota}{\partial x_\iota} = 0,\quad \frac{\partial F_\iota}{\partial x_\varkappa}+\frac{\partial F_\varkappa}{\partial x_\iota} = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x_\varkappa^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 F_\varkappa}{\partial x_\iota\partial x_\lambda}+\frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x_\iota\partial x_\varkappa} = 0.$$

Aus der letzteren Gleichung bilde man neue durch Vertauschung der Marken $\iota, \varkappa, \lambda$, und dann folgt $\frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x_\iota\partial x_\varkappa} = 0$, so dass F_λ eine lineare Function $\sum_\varrho m_{\lambda\varrho}x_\varrho+q_\lambda$ ist mit der Bedingung $m_{\lambda\varrho}+m_{\varrho\lambda} = 0$.

Dies führt zu den $\frac{n(n+1)}{2}$ infinitesimalen Transformationen:

$$p_\iota,\ x_\iota p_\varkappa - x_\varkappa p_\iota \quad \text{für} \quad \iota, \varkappa = 1, \dots n.$$

Dass hierdurch die Euklidische Raumform bestimmt wird, ist bekannt.

Wenn M positiv $= \frac{1}{k^2}$ ist, so kann man nach den Untersuchungen des Herrn *Lipschitz* den quadratischen Ausdruck auf die Form bringen:

$$\frac{\Sigma dx_i^2}{1+\frac{1}{4k^2}\Sigma x_i^2}.$$

Schon aus dieser Form ergeben sich sehr einfache Bewegungsgleichungen. Zu noch einfacheren gelangt man aber, wenn man

$$x_x = \frac{2u_x}{1+u_0}, \quad k^2u_0^2+u_1^2+\cdots+u_n^2 = k^2$$

oder umgekehrt

$$u_0 = \frac{4k^2-\Sigma x_x^2}{4k^2+\Sigma x_x^2}, \quad u_a = \frac{4k^2 x_a}{4k^2+\Sigma x_x^2}$$

setzt. Hierdurch geht der Differentialausdruck über in $k^2du_0^2+du_1^2+\cdots+du_n^2$. Demnach können die unendlich kleinen Bewegungen, wenn man $\frac{\partial f}{\partial u_a} = q_a$ setzt, symbolisch durch $u_i q_x - u_x q_i$ und $k^2u_0 q_x - u_x q_0$ dargestellt werden. Es sind dies die Raumformen constanter positiver Krümmung, welche ich (dieses Journal Bd. 86 S. 72 ff.) als die *Riemann*sche Raumform und deren Polarform unterscheide.

Ist M negativ, so lasse man k^2 negativ sein; dann bleiben die Formeln ungeändert, und man gelangt zu der *Lobatschewsky*schen Raumform.

§ 12.

Directe Bestimmung der zugehörigen Gruppe.

Zu den im vorigen Paragraphen vermittelst der Integrabilitäts-Bedingungen gewonnenen Resultaten wollen wir jetzt versuchen, auf anderen Wegen zu gelangen. Um auf ein Beweisverfahren, welches hier angewandt werden könnte, wenigstens aufmerksam zu machen, fassen wir das hauptsächlichste Ergebniss des § 10 in die Worte:

Jede eigentliche Raumform kann für jedes unendlich kleine Gebiet als eine Euklidische betrachtet werden.

Von diesem Resultate ausgehend, kann man die ebenen und die Kugelgebilde rein geometrisch herleiten. Dadurch gelangt man für einen dreidimensionalen Raum zu allen jenen Sätzen, welche *Euklid* implicite oder explicite voraussetzt, mit Ausnahme des sogenannten elften Grundsatzes; und für einen mehrdimensionalen Raum wird das Er-

gebniss ganz ähnlich. Hiervon ausgehend kommt man zu den verschiedenen Arten des Raumes.

Wir ziehen es jedoch vor, entsprechend dem in § 10 verfolgten Wege auch ferner die Theorie der Transformationsgruppen anzuwenden. Dabei berücksichtigen wir vor allem das Resultat, dass die Gruppe derjenigen Bewegungen, welche bei der Ruhe eines Punktes möglich sind, durch $\frac{n(n-1)}{2}$ infinitesimale Transformationen $X_{\iota\varkappa}f$ bestimmt wird, und dass zwischen diesen die Beziehungen bestehen:

$$(1.)\qquad (X_{\iota\varkappa}X_{\varkappa\lambda}) = X_{\iota\lambda}f, \quad (X_{\iota\varkappa}X_{\lambda\mu}) = 0$$

für ungleiche Werthe von ι, $\varkappa$, λ, μ. Diese Gruppe ist für $n = 3, 5, 6, \ldots$ einfach; nur für $n = 4$ kann sie durch blosse Zusammenstellung zweier einfachen Gruppen gebildet werden. Es fragt sich jetzt, wie die weiteren n Transformationen $X_1 f, \ldots X_n f$, welche zur Bestimmung der Gruppe noch nothwendig sind, hinzugefügt werden müssen. Um diese Frage beantworten zu können, berücksichtigen wir, dass bei der Ruhe eines Punktes kein Gebilde in Ruhe verbleiben muss, dass also die Gruppe zu denjenigen gehört, welche Herr *Lie* als asystatisch bezeichnet. Darüber beweist er den Satz (Transformations-Gruppen I. S. 520):

Eine transitive Gruppe ist dann und nur dann asystatisch, wenn die einem Punkte von allgemeiner Lage zugeordnete Untergruppe in keiner grösseren Untergruppe (und ebensowenig in der Gruppe selbst) invariant ist.

In unserem Falle darf also die Gruppe der $X_{\iota\varkappa}$ weder in der Gruppe aller Bewegungen des Raumes noch in einer Untergruppe von mehr als $\frac{n(n-1)}{2}$ Gliedern eine invariante Untergruppe darstellen. Wie also auch die $X_a f$ gewählt werden, wofern sie nur unter einander und von den $X_{\iota\varkappa}$ unabhängig sind, darf es nicht möglich sein, dass die Combination aller $X_{\iota\varkappa}$ mit einigen der X_a durch die $X_{\iota\varkappa}$ allein ausgedrückt werden könne.

Hiermit stellen wir folgenden Satz zusammen:

Wenn eine Gruppe nicht ihre eigene Haupt-Untergruppe ist und eine einfache oder halbeinfache Untergruppe G_e besitzt, so enthält sie auch stets eine Untergruppe, deren Transformationen mit allen denen von G_e vertauschbar sind.

Wenn aber in unserem Falle die Haupt-Untergruppe weniger als $\frac{n(n+1)}{2}$ Parameter enthielte, so gäbe es in der Gruppe mindestens eine

genügt, mit der vorstehenden ähnlich. Wir erhalten also nur zwei wesentlich verschiedene Gruppen, jenachdem k^2 positiv oder negativ ist, und gelangen wieder zu den Raumformen constanter positiver oder negativer Krümmung.

Wenden wir ebenso die allgemeinen Sätze über die Gestaltung der Gruppen auf diejenigen an, welche aus der Gruppe (1.) und einer invarianten Untergruppe vom Range Null zusammengesetzt sind, so finden wir, dass die Transformationen der invarianten Untergruppe sämmtlich mit einander vertauschbar sind. Wählt man n beliebige unter ihnen zur Aufstellung des Coordinatensystems, so ergeben sich die infinitesimalen Transformationen in der Form:

$$X_1 f = p_1, \quad X_2 f = p_2, \quad \dots \quad X_n f = p_n.$$

Weil diese aber eine invariante Untergruppe bestimmen, muss

$$(X_\alpha X_{\iota\varkappa}) = \frac{\partial X_{\iota\varkappa}}{\partial x_\alpha} \quad \text{aus} \quad p_1, \ \dots \ p_\varkappa$$

durch Multiplication mit constanten Grössen und Addition erhalten werden; also kommen in den $X_{\iota\varkappa}f$ die $x_1, \dots x_n$ nur linear vor. Soll jetzt die lineare Form $K(dx_1, \dots dx_n)$ lauter Quadrate enthalten, so sind die infinitesimalen Transformationen

$$(5.) \qquad p_\iota, \quad x_\iota p_\varkappa - x_\varkappa p_\iota \quad \text{für} \quad \iota, \varkappa = 1, \dots n.$$

Daraus folgen unmittelbar alle Eigenschaften der Euklidischen Geometrie. Somit erhalten wir den Satz:

Es giebt nur drei verschiedene Gruppen, welche zu den eigentlichen Raumformen gehören. Dieselben müssen sämmtlich ihre eigenen Haupt-Untergruppen sein. Zu ihrer Bestimmung benutze man $\frac{n(n+1)}{2}$ *infinitesimale Transformationen, und wähle dieselben so, dass immer ist:*

$$(X_{\iota\varkappa} X_{\varkappa\lambda}) = X_{\iota\lambda}, \quad (X_{\iota\varkappa} X_{\lambda\mu}) = 0, \quad (X_\iota X_{\iota\varkappa}) = X_\varkappa f;$$

dazu kommen entweder

$$(X_\iota X_\varkappa) = -\frac{1}{k^2} X_{\iota\varkappa} f,$$

wo k^2 *eine positive oder negative Constante ist, oder*

$$(X_\iota X_\varkappa) = 0.$$

Den Satz, dass die invariante Untergruppe vom Range Null, welche in einer zu einer eigentlichen Raumform gehörigen Gruppe vorkommen kann, lauter vertauschbare Transformationen enthält, kann man auf einen

Satz stützen, dem man unter Anwendung einer von mir eingeführten Bezeichnung den Ausspruch geben kann:

Wenn alle Nebenwurzeln durch eine einzige mitgefordert sind, so sind die Transformationen der invarianten Untergruppe mit einander vertauschbar.

Aus diesem Satze folgt nämlich:

Wenn die $Y_\iota f$ eine einfache Untergruppe, die $Z_\alpha f$ die invariante Untergruppe vom Range Null bestimmen, und wenn man, ausgehend von einem $Z_\alpha f$, durch Combination mit allen $Y_\iota f$ jedesmal (wenigstens allmählich) zu allen $Z_\alpha f$ gelangt, so sind alle Transformationen der invarianten Untergruppe mit einander vertauschbar.

In unserem Falle lasse man die $X_{\iota\varkappa} f$ derartig gewählt sein, dass der Nullpunkt in Ruhe bleibt. Indem wir von demselben aus n Richtungen passend wählen, können wir für die $X_{\iota\varkappa} f$ die Form voraussetzen:

$$X_{\iota\varkappa} f = x_\iota p_\varkappa - x_\varkappa p_\iota + \cdots,$$

wo in den weiteren Gliedern die $p_1, \ldots p_n$ mit Functionen zweiten und höheren Grades von $x_1, \ldots x_n$ multiplicirt werden. Ebenso können wir annehmen, dass in jedem $X_\iota f$ als einziges Glied ohne $x_1, \ldots x_n$ das p_ι vorkommt. Daraus folgt:

$$(X_\iota X_{\iota\varkappa}) = X_\varkappa f + [X_{\varrho\sigma} f],$$

wo der Klammerausdruck eine lineare homogene Function der $X_{\varrho\sigma} f$ bezeichnen soll. Dieser muss verschwinden, wenn die $X_\iota f, \ldots X_\varkappa f$ als der invarianten Untergruppe angehörig vorausgesetzt werden. Somit gelangt man in der That, von einem beliebigen $X_\iota f$ ausgehend, durch die Operation $(X_\iota X_{\iota\varkappa})$ zu allen $X_\varkappa f$.

So überaus einfach die vorstehenden Beweise auch sind, haben sie doch den Nachtheil, dass sie manche Sätze voraussetzen, und noch dazu solche, welche erst durch ein tieferes Studium der Theorie der Transformations-Gruppen gewonnen werden können. Es erscheint daher angemessen, einen Beweis beizufügen, welcher nur die einfachsten Principien dieser Theorie, nämlich die Formeln (1.)—(4.) in § 9 voraussetzt.

Zu dem Ende gehen wir wieder von derjenigen Darstellung der $\frac{n(n+1)}{2}$ infinitesimalen Transformationen aus, welche wir oben als möglich angegeben haben; es ist das die Form:

$$(6.)\quad \begin{cases} X_\iota f = p_\iota + \sum\limits_{\varrho,\sigma} h^\iota_{\varrho\sigma} x_\varrho p_\sigma + \cdots, \\ X_{\iota\varkappa} f = x_\iota p_\varkappa - x_\varkappa p_\iota + \sum k^\iota_{\varrho\sigma,\tau} x_\varrho x_\sigma p_\tau + \cdots. \end{cases}$$

Daraus ergeben sich für die Zusammensetzung die Formeln:

$$(7.)\quad \begin{cases} (X_\iota X_{\iota\varkappa}) = X_\varkappa + \sum\limits_{(\varrho\sigma)} c^\iota_{\iota\varkappa,\varrho\sigma} X_{\varrho\sigma}, \\ (X_\iota X_{\varkappa\lambda}) = \sum\limits_{(\varrho\sigma)} c^\iota_{\varkappa\lambda,\varrho\sigma} X_{\varrho\sigma}, \end{cases}$$

nebst den oben hergeleiteten $(X_{\iota\varkappa} X_{\varkappa\lambda}) = X_{\iota\lambda}$. In (7.), wie auch stets im Folgenden, erstreckt sich die Summation nach ϱ, σ nur auf die verschiedenen Combinationen aus je zwei ungleichen Marken der Reihe $1, \ldots n$.

Jetzt fügen wir zu jedem $X_\iota f$ einen linearen Ausdruck der $X_{\varrho\sigma}$ hinzu, nämlich:

$$\sum_{(\varrho\sigma)} m^\iota_{\varrho\sigma} X_{\varrho\sigma},$$

und wir wollen zeigen, dass die $\binom{n}{1}\binom{n}{2}$ Coefficienten $m^\iota_{\varrho\sigma}$ so gewählt werden können, dass die Gleichungen bestehen:

$$(8.)\quad \begin{cases} (X_\iota + \sum\limits_{(\varrho\sigma)} m^\iota_{\varrho\sigma} X_{\varrho\sigma},\ X_{\iota\varkappa}) = X_\varkappa + \sum\limits_{(\varrho\sigma)} m^\varkappa_{\varrho\sigma} X_{\varrho\sigma}, \\ (X_\iota + \sum\limits_{(\varrho\sigma)} m^\iota_{\varrho\sigma} X_{\varrho\sigma},\ X_{\varkappa\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Nun ist

$$(X_\iota + \sum_{\varrho\sigma} m^\iota_{\varrho\sigma} X_{\varrho\sigma},\ X_{\iota\varkappa}) = X_\varkappa + \sum_{(\varrho\sigma)} c^\iota_{\iota\varkappa,\varrho\sigma} X_{\varrho\sigma} + \sum_\tau (m^\iota_{\iota\tau} X_{\varkappa\tau} - m^\iota_{\varkappa\tau} X_{\iota\tau}),$$

wo die Summation nach τ nur über die von ι und $\varkappa$ verschiedenen Marken auszuführen ist. Ebenso ist:

$$(X_\iota + \sum m^\iota_{\varrho\sigma} X_{\varrho\sigma},\ X_{\varkappa\lambda}) = \sum_{(\varrho\sigma)} c^\iota_{\varkappa\lambda,\varrho\sigma} X_{\varrho\sigma} + \sum_\tau (m^\iota_{\varkappa\tau} X_{\lambda\tau} - m^\iota_{\lambda\tau} X_{\varkappa\tau}).$$

wo jetzt τ von $\varkappa$ und λ verschieden sein muss.

Daraus ergeben sich für die c folgende Bedingungen:

$$(9.)\qquad c^\iota_{[illegible]} = 0, \quad c^\iota_{[illegible]} = 0, \quad c^\iota_{[illegible]} = 0$$

und zur Bestimmung der m die Gleichungen:

$$m^\iota_{[illegible]} = c^\iota_{[illegible]}, \quad m^\iota_{[illegible]} = -c^\iota_{[illegible]}, \quad c^\iota_{[illegible]} = c^\iota_{[illegible]}, \quad m^\varkappa_{[illegible]} = c^\iota_{[illegible]},$$
$$m^\iota_{[illegible]} - m^\varkappa_{[illegible]} = c^\iota_{[illegible]}, \quad m^\iota_{[illegible]} - m^\varkappa_{[illegible]} = -c^\iota_{[illegible]}.$$

Indem wir zunächst die Ausdrücke für ein $m^\iota_{[illegible]}$ mit einander vergleichen, ergeben sich für die c die weiteren Bedingungen:

$$(10.)\qquad c^\iota_{[illegible]} = c^\iota_{[illegible]} = c^\iota_{[illegible]}, \quad c^\iota_{[illegible]} - c^\iota_{[illegible]} - c^\iota_{[illegible]} = 0.$$

Dazu kommen infolge der Ausdrücke für ein $m^\iota_{[illegible]}$ die Beziehungen:

$$(11.)\quad \begin{cases} c^{\iota}_{\iota\varkappa,\iota\lambda} = c^{\varkappa}_{\varkappa\iota,\varkappa\lambda}, \quad c^{\iota}_{\iota\varkappa,\iota\lambda} + c^{\varkappa}_{\varkappa\lambda,\varkappa\iota} + c^{\lambda}_{\lambda\iota,\lambda\varkappa} = 0, \quad c^{\iota}_{\varkappa\mu,\mu\lambda} + c^{\varkappa}_{\iota\mu,\mu\lambda} + c^{\iota}_{\iota\varkappa,\mu\lambda} = 0, \\ c^{\iota}_{\varkappa\mu,\lambda\mu} = c^{\iota}_{\varkappa\nu,\lambda\nu} = c^{\mu}_{\mu\iota,\varkappa\lambda} = c^{\nu}_{\nu\iota,\varkappa\lambda}. \end{cases}$$

Dass diese Beziehungen sämmtlich bestehen, kann man sehr leicht aus der Gleichung (4.) § 9 (der *Jacobi*schen Identität) folgern. Wir bilden dieselbe zunächst für X_ι, $X_{\iota\varkappa}$, $X_{\varkappa\lambda}$, wodurch wir die Gleichung erhalten:

$$((X_\iota X_{\iota\varkappa}) X_{\varkappa\lambda}) - (X_\iota X_{\iota\lambda}) - ((X_\iota X_{\varkappa\lambda}) X_{\iota\varkappa}) = 0.$$

Indem wir hierin die Werthe (7.) einsetzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}(X_\varkappa X_{\varkappa\lambda}) - (X_\iota X_{\iota\lambda}) = {} & c^{\iota}_{\iota\varkappa,\iota\lambda} X_{\iota\varkappa} - c^{\iota}_{\iota\varkappa,\iota\varkappa} X_{\iota\lambda} - c^{\iota}_{\varkappa\lambda,\varkappa\lambda} X_{\iota\lambda} + c^{\iota}_{\iota\varkappa,\iota\lambda} X_{\varkappa\lambda} \\ & + \sum_\tau (c^{\iota}_{\varkappa\lambda,\iota\tau} X_{\varkappa\tau} + c^{\iota}_{\iota\varkappa,\lambda\tau} X_{\varkappa\tau} - c^{\iota}_{\varkappa\lambda,\varkappa\tau} X_{\iota\tau} - c^{\iota}_{\iota\varkappa,\varkappa\tau} X_{\lambda\tau}),\end{aligned}$$

wo die Summation nach τ sich nur über die von ι, $\varkappa$, λ, verschiedenen Marken erstreckt. Daraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$(12.)\quad \begin{cases} c^{\iota}_{\iota\varkappa,\iota\lambda} + c^{\iota}_{\iota\lambda,\iota\varkappa} - c^{\varkappa}_{\varkappa\lambda,\iota\varkappa} = 0, \quad c^{\iota}_{\iota\lambda,\varkappa\lambda} + c^{\iota}_{\varkappa\lambda,\iota\lambda} + c^{\varkappa}_{\varkappa\lambda,\varkappa\lambda} = 0, \\ c^{\iota}_{\iota\varkappa,\iota\varkappa} - c^{\iota}_{\iota\lambda,\iota\lambda} + c^{\varkappa}_{\varkappa\lambda,\iota\lambda} + c^{\iota}_{\varkappa\lambda,\varkappa\lambda} = 0, \quad c^{\iota}_{\iota\lambda,\mu\nu} = c^{\varkappa}_{\varkappa\lambda,\mu\nu}, \\ c^{\iota}_{\iota\lambda,\iota\mu} - c^{\varkappa}_{\varkappa\lambda,\lambda\mu} - c^{\iota}_{\varkappa\lambda,\varkappa\mu} = 0, \quad c^{\iota}_{\iota\varkappa,\lambda\mu} + c^{\iota}_{\varkappa\lambda,\iota\mu} + c^{\iota}_{\iota\lambda,\varkappa\mu} - c^{\varkappa}_{\varkappa\lambda,\varkappa\mu} = 0. \end{cases}$$

Ebenso bilde man die Gleichung (4.) § 9 für X_ι, $X_{\iota\varkappa}$, $X_{\lambda\mu}$ und erhält daraus:

$$c^{\varkappa}_{\lambda\mu,\iota\varkappa} = 0, \quad c^{\varkappa}_{\lambda\mu,\lambda\mu} = 0, \quad c^{\varkappa}_{\lambda\mu,\lambda\nu} = c^{\iota}_{\iota\varkappa,\mu\nu}, \quad c^{\iota}_{\iota\varkappa,\lambda\nu} + c^{\varkappa}_{\lambda\mu,\mu\nu} = 0.$$

Will man nicht aus den gebildeten Relationen die Beziehungen:

$$c^{\iota}_{\varkappa\mu,\nu\varrho} = 0, \quad c^{\iota}_{\varkappa\mu,\iota\varkappa} = c^{\iota}_{\lambda\mu,\iota\lambda}$$

herleiten, so kann man sie aus der für X_ι, $X_{\varkappa\lambda}$, $X_{\lambda\mu}$ gebildeten Identität unmittelbar hinschreiben.

Hiermit sind die meisten der durch die Gleichungen (9.), (10.), (11.) geforderten Beziehungen direct bewiesen. Nur einige wenige bedürfen noch einer kurzen Herleitung. Vergleicht man mit der ersten Gleichung (12.) diejenige, welche aus ihr durch Vertauschung der Marken ι und $\varkappa$ hervorgeht, so folgt $c^{\iota}_{\iota\varkappa,\iota\lambda} = c^{\varkappa}_{\varkappa\iota,\varkappa\lambda}$, und ersetzt man das zweite Glied in dieser selben Gleichung durch $c^{\lambda}_{\lambda\iota,\lambda\varkappa}$, so erhält man die zweite Gleichung (11.). Die letzte Gleichung (10.) wird durch blosse Aenderung der Marken aus der dritten Gleichung (12.) erhalten. (Auf kleine Aenderungen, welche die Herleitung für $n = 3$ erleidet, soll nur hingedeutet werden.) Damit ist der Nachweis erbracht, dass die $m^{\iota}_{\varrho\sigma}$ immer in der vorgeschriebenen Weise bestimmt werden können (für $n = 3$ noch so, dass eine Grösse unbestimmt

bleibt). Wir dürfen also voraussetzen, dass die Beziehungen bestehen:

$$(X_\iota X_{\iota\varkappa}) = X_\varkappa f, \quad (X_\iota X_{\varkappa\lambda}) = 0.$$

Jetzt bilde man die oft benutzte Gleichung (4.) § 9 für X_ι, $X_\varkappa$, $X_{\iota\varkappa}$, so folgt, dass $(X_\iota X_\varkappa)$ mit $X_{\iota\varkappa}$ vertauschbar ist, also ausser $X_{\iota\varkappa}$ nur solche X_λ, $X_{\lambda\mu}$ enthalten kann, wo λ, μ von ι und $\varkappa$ verschieden sind. Ebenso liefert $(X_\iota X_\varkappa X_{\lambda\mu})$ den Satz, dass $(X_\iota X_\varkappa)$ auch mit $X_{\lambda\mu}$ vertauschbar ist. Für $n > 4$ folgt daraus $(X_\iota X_\varkappa) = e_{\iota\varkappa} X_{\iota\varkappa}$; für $n = 3$ ergiebt sich:

$$(X_\iota X_\varkappa) = e_{\iota\varkappa} X_{\iota\varkappa} + g_\lambda X_\lambda,$$

aber dann dient die sogleich im Folgenden zu benutzende Relation unter Anwendung der für die X_1, X_2, X_3 gebliebenen Unbestimmtheit dazu, die g_λ zum Verschwinden zu bringen. Für $n = 4$ folgt zunächst:

$$(X_\iota X_\varkappa) = e_{\iota\varkappa} X_{\iota\varkappa} + g_{\iota\varkappa} X_{\lambda\mu};$$

aber die folgende Untersuchung lässt $g_{\iota\varkappa}$ verschwinden. Endlich lehrt die *Jacobi*sche Identität für $(X_\iota X_\varkappa X_{\varkappa\lambda})$ oder die Gleichung:

$$((X_\iota X_\varkappa) X_{\varkappa\lambda}) = (X_\iota X_\lambda),$$

dass in $(X_\iota X_\varkappa) = c X_{\iota\varkappa}$ der Coefficient c von den Marken ι, $\varkappa$ unabhängig ist. Wir können also wieder c entweder gleich Null oder gleich $-\frac{1}{k^2}$ setzen, und haben wiederum gefunden, dass betreffs der Zusammensetzung nur die angegebenen Fälle möglich sind. Dass wir aber für $c = 0$ überhaupt nur eine einzige Raumform erhalten, ist bereits oben in sehr einfacher Weise gezeigt. Wir haben also nur noch zu beweisen, dass auch für ein nicht verschwindendes $c = -\frac{1}{k^2}$ der Zusammensetzung, nach passender Wahl des Coordinatensystems, eine einzige Darstellung entspricht, welche für unendlich kleine Werthe von $x_1, \dots x_n$ auf die Form (6.) hinauskommt. Da aber die Darstellung (6.) nur die unendlich kleinen Werthe von $x_1, \dots x_n$ als bestimmt voraussetzt, kommt es jetzt darauf an, die Fortsetzung so zu bestimmen, dass möglichst einfache Formeln entstehen. Hierzu eignet sich der in § 7 angegebene Weg weniger; eine kleine Umgestaltung desselben würde uns allerdings auch zum Ziele führen. Indessen möchte ich auf einen anderen Weg aufmerksam machen, der mit entsprechenden Veränderungen auch sonst recht brauchbar ist.

Die Darstellung (6.) zeigt, dass für unendlich kleine Werthe der Variabeln das Gebilde $x_\iota = 0$ für diejenige Untergruppe in sich verbleibt, welche dadurch erhalten wird, dass man in $X_\alpha f$, $X_{\alpha\beta} f$ die Marken α, β auf die $n-1$ Marken $1, 2, \ldots \iota-1, \iota+1, \ldots n$ mit Ausnahme von ι beschränkt. Somit wird auch allgemein durch diese Untergruppe ein Gebilde in sich bewegt, und wir setzen allgemein für die Punkte desselben $x_\iota = 0$ an. Mit diesem Gebilde wird aber eine Schaar weiterer in sich bewegt, und es erscheint angemessen, für jedes einzelne unter ihnen den Werth x_ι constant sein zu lassen. Die $n-1$ derartig bestimmten Gebilde $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots x_{n-1} = 0$, und somit auch ihre Schnittlinie werden durch die eingliedrige Untergruppe $X_n f$ in sich verschoben. Man benutze diese Bewegung, um nach den in § 7 getroffenen Festsetzungen jedem Punkte dieser Linie eine Zahl y_n zuzuordnen. Dann setze man $x_n = k \sin \frac{y_n}{k}$, und da derselbe Werth x_n für alle Punkte des eben genannten Gebildes gilt, so kann man für alle Punkte in einer endlichen Umgebung des Nullpunktes n Coordinaten festsetzen. Jetzt gilt für unendlich kleine Werthe die Darstellung (6.). Man übersieht aber auch sehr leicht, dass allgemein die Darstellung besteht:

$$X_\iota f = p_\iota \sqrt{\frac{k^2 - x_1^2 - x_2^2 \cdots - x_n^2}{k^2}}, \quad X_{\iota\varkappa} f = x_\iota p_\varkappa - x_\varkappa p_\iota,$$

und es wird nicht nothwendig sein, auf den Beweis näher einzugehen.

§ 13.

Die Raumformen von zwei Dimensionen.

Bereits vor längerer Zeit hat Herr *Lie* sämmtliche Transformations-Gruppen für zwei Veränderliche angegeben (Mathem. Annalen Bd. XVI). Hierin hat man nur noch die Realität zu berücksichtigen, um leicht entscheiden zu können, welche Gruppen unserer letzten Voraussetzung genügen. Später habe ich unabhängig davon (Programm 1884) die sämmtlichen dreigliedrigen Gruppen aufgestellt, und da unsere Voraussetzung bei zwei Dimensionen offenbar drei Grade von Beweglichkeit liefert, würde es auch genügen, aus den verschiedenen so gefundenen Systemen die passenden auszuwählen. Indessen ziehe ich eine directe Entwicklung vor.

Die Bedingung, dass bei der Ruhe eines Punktes ein bewegter Punkt auf einer Linie verbleibt, genügt keineswegs, um auch nur eine eng be-

grenzte Klasse von Raumformen zu erhalten. Es kommt dies darauf hinaus, eine Invariante zwischen zwei Punkten vorauszusetzen; wenn hierin aber nur eine Variable wesentlich ist, so bedarf es noch einer zweiten Invariante, und diese kann zwischen beliebig vielen Punkten angenommen werden. Nur wenn man die Linie als geschlossen voraussetzt, kommt man, wie Herr *von Helmholtz* bereits 1868 bewiesen hat, auf sehr wenige Raumformen. Da wir aber für eine grössere Zahl von Dimensionen einen anderen Weg eingeschlagen haben, müssen wir denselben auch hier verfolgen.

Lassen wir einen Punkt in Ruhe, so wird die alsdann noch mögliche Bewegung durch eine eingliedrige Gruppe bestimmt. Dasselbe gilt dann auch für die unendlich nahen Punkte, und wir können für deren Aenderung unter Benutzung der in § 10 angewandten Bezeichnung die infinitesimale Transformation voraussetzen $\Sigma m_{\iota\varkappa} z_\iota r_\varkappa$ für $\iota, \varkappa = 1, 2$. Hierbei bleiben zwei (reelle oder imaginäre) oder eine einzige Linie in Deckung mit der Anfangslage. Da der letztere Fall nicht eintreten kann, so ist die Invariante:

$$(M_1 dx_1 + M_2 dx_2)^\alpha . (N_1 dx_1 + N_2 dx_2)^\beta,$$

wo die beiden linearen Ausdrücke conjugirt complex sein müssen. Hier sind M_1, M_2, N_1, N_2 Functionen von x_1 und x_2; wir können also entsprechend den Untersuchungen des § 11 fragen, wann die vorliegende Form sich bei Transformationen nicht ändert. Diese Frage erledigt sich besonders einfach, wenn in α und β der imaginäre Theil nicht verschwindet, worauf wir jedoch nicht näher eingehen. Dagegen ändert sich § 11 nicht für $\alpha = \beta$, wo man erhält $a_{11} dx_1^2 + 2a_{12} dx_1 dx_2 + a_{22} dx_2^2$. Dann erleidet die Gl. (11.) § 11 keine Aenderung; und da die Gleichung $(1212) = M(x).[1212]$ selbstverständlich ist, so folgt die Constanz von $M(x)$ unmittelbar.

Wenden wir jetzt die in § 12 entwickelte Methode auf unseren Fall an, so können wir voraussetzen:

$$(1.) \qquad X_1 f = p_1 + \cdots, \quad X_2 f = p_2 + \cdots, \quad X_3 f = (\alpha x_1 + x_2) p_1 + (-x_1 + \alpha x_2) p_2 + \cdots,$$

woraus für die Zusammensetzung folgt:

$$(X_1 X_3) = \alpha X_1 - X_2 + \beta X_3, \quad (X_2 X_3) = X_1 + \alpha X_2 + \gamma X_3,$$
$$(X_1 X_2) = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3.$$

Nun folgt aus der Gleichung (4.) § 9:

$$(2.) \qquad (c_1 - \gamma)(X_1 X_3) + (c_2 + \beta)(X_2 X_3) - 2\alpha (X_1 X_2) = 0.$$

Da aber:

$$(X_1+\varkappa X_3,\ X_2+\lambda X_3) = (X_1 X_2)+\lambda(X_1 X_3)-\varkappa(X_2 X_3),$$

so kann man bei nicht verschwindendem α diesen Ausdruck gleich Null machen, wenn man $\varkappa = \frac{c_2+\beta}{2\alpha}$, $\lambda = -\frac{c_1-\gamma}{2\alpha}$ setzt. Aber auch für $\alpha = 0$ kann man im letzten Ausdruck die Coefficienten von X_1 und X_2 zum Verschwinden bringen. Ersetzt man dann $X_1+\varkappa X_3$ durch X_1, $X_2+\lambda X_3$ durch X_2, so müssen wegen der Unabhängigkeit von $(X_1 X_3)$ und $(X_2 X_3)$ auch β und γ verschwinden. Somit erhalten wir die folgenden Möglichkeiten:

$$\text{(a.)} \qquad (X_1 X_3) = -X_2, \quad (X_2 X_3) = X_1, \quad (X_1 X_2) = cX_3,$$

wo c positiv oder negativ oder gleich Null ist;

$$\text{(b.)} \quad (X_1 X_3) = \alpha X_1 - X_2, \quad (X_2 X_3) = \alpha X_2 + X_1, \quad (X_1 X_2) = 0,$$

wo α von Null verschieden sein soll.

Zur Darstellung der Gruppe (a.) geht man wieder von der Form (1.) aus und gelangt zu solchen Raumformen, welche ganz den im vorigen Paragraphen gefundenen entsprechen. Dagegen zeigt die Raumform (b.) wesentlich andere Eigenschaften. Die unendlich kleinen Transformationen können wir darstellen durch

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = (\alpha x_1 + x_2)p_1 + (-x_1 + \alpha x_2)p_2.$$

Die allgemeinste endliche Bewegung ergiebt sich unter Anwendung dreier willkürlichen Grössen a, b, t aus den Gleichungen:

$$x'-a = e^{\alpha t}[(x-a)\cos t - (y-b)\sin t)],$$
$$y'-b = e^{\alpha t}[(x-a)\sin t + (y-b)\cos t].$$

Bei der Drehung um einen Punkt bewegt sich jeder zweite in einer gewissen Spirale; dabei kehrt jede Richtung in die Anfangslage zurück, aber die einzelnen Punkte nehmen ihre Anfangslage nicht wieder an. Lassen wir einen einfach begrenzten Theil dieses Raumes sich drehen um einen Punkt in seinem Innern und zwar eine volle Umdrehung ($t = 2\pi$) ausführen, so wird der Raumtheil, welcher jetzt gedeckt wird, entweder den früheren als Theil in sich schliessen oder von dem früheren eingeschlossen. Durch unbegrenzte Fortsetzung dieser Bewegung kann ein beliebig gewählter Körper (wo dies Wort im Sinne unserer Grundsätze benutzt wird) dazu gebracht werden, einmal jeden beliebig gewählten (endlichen) Raum-

theil einzuschliessen und bei anderer Drehungsrichtung in einen beliebig kleinen, um den ruhenden Punkt gewählten Raumtheil ganz hineinzugelangen. Somit kann man dem Grundsatz VIII leicht einen Ausspruch geben, welcher diese Raumform ganz ausschliesst. Zu ihrer Darstellung kann man die sämmtlichen Geraden wählen, welche in einer dreifach ausgedehnten *Lobatschewsky*schen Raumform einer festen Richtung parallel sind, wofern festgesetzt wird, dass jede Drehung um eine Gerade der Schaar mit einer durch α charakterisirten Verschiebung längs derselben Geraden verbunden ist.

Die Trigonometrie in der absoluten Geometrie.

(Von Herrn *Max Simon* in Strassburg i. E.)

(Hierzu Figurentafel I.)

Bolyai und *Lobatschewsky* haben die Trigonometrie mit Hülfe der Grenzfläche abgeleitet, doch lässt sich dieselbe rein planimetrisch ableiten wie folgt:

Seien $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{A'B'}$ (Fig. 1) einander parallel, A und A' wie B und B' entsprechende Punkte, verbunden durch die Grenzbogen AA' bezw. BB', so sind die Paare A und A', desgleichen B und B' Paare von Gegenpunkten in Bezug auf die Axe des Streifens, folglich AB' gleich $A'B$. Es sei AB oder $A'B'$ gleich x, alsdann ist Grenzbogen $\widehat{AA'}:\widehat{BB'} = e^{\frac{x}{k}} = e^x$, wenn die Strecke und ihre Masszahl in Bezug auf k stets gleich bezeichnet werden. [Gegen den Beweis dieser Grundrelation bei *Bolyai (Frischauf)* und *Lobatschewsky* ist in dem Programm der städtischen Oberrealschule zu Coblenz 1833 von Herrn *Most* ein begründeter Einwand erhoben. Der Beweis ist folgendermassen zu führen: Seien (Fig. 2) Bogen $AB = a$, $CF = b$, $DE = c$. Sei a gleich $2b$, so ist, wenn M die Mitte von AB ist, $AMGF \cong FCDE$, und somit auch $b = 2c$, d. h. alle Grenzbogen in der Entfernung AJ oder JE gleich d stehen im Verhältniss 2. Sei a gleich $3b$, und AM gleich b, so gilt wieder dieselbe Congruenz, also auch b gleich $3c$ u. s. w., und so folgt aus der Congruenz aller Grenzkreise und ihrer Gleichförmigkeit der Satz: Concentrische Grenzbogen in gleichen Abständen stehen im gleichen Verhältniss.]

Sind AA' und BB' (Fig. 1) hinlänglich klein, so gilt in den bei A und B' rechtwinkligen Dreiecken BAA' und $BB'A'$ der Sinussatz, und es ist:

$$\frac{\sin z}{\sin z'} = \frac{AA'}{BB'} = e^x.$$

Das Verhältniss auf der rechten Seite ist von der Grösse des Winkels z

unabhängig, ebenso wie von der Bogenlänge; es liegt die Vermuthung nahe, dass es auch die linke sei. Wenn die beliebigen Bogen AA' und BB' um die unendlich kleinen Grössen $A'A''$ und $B'B''$ wachsen, wobei z und z' sich um ε und ε' ändern, so ist:

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin(90+z')} = \frac{A'A''}{A''B}; \quad \frac{\sin\varepsilon'}{\sin(90+z)} = \frac{B'B''}{AB''},$$

und da $A''B = AB''$,

$$\frac{\sin\varepsilon\cos z}{\sin\varepsilon'\cos z'} = \frac{A'A''}{B'B''} = e^x;$$

$$\frac{\sin(z+\varepsilon)}{\sin(z'+\varepsilon')} = \frac{\sin z+\cos z\sin\varepsilon}{\sin z'+\cos z'\sin\varepsilon'} = e^x, \quad \text{wenn} \quad \frac{\sin z}{\sin z'} = e^x.$$

Da diese Bedingung für hinreichend kleine Bogen erfüllt ist, so ist allgemein, wenn AA' und BB' beliebige concentrische Grenzbogen sind:

$$(1.) \qquad \frac{\sin z}{\sin z'} = \frac{AA'}{BB'} = e^x,$$

also: ***Das Verhältniss der Sinus der Wechselwinkel an Parallelstrahlen ist gleich dem der zugehörigen Grenzbogen.***

Sei (Fig. 3) ABC das bei A rechtwinklige Dreieck, man verdopple es durch AC' gleich AC, und ziehe durch B die Parallelstrahlen zu $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AC'}$, es seien YBX und $Y'BX'$. Winkel XBC werde mit z' und YBC' mit z'' bezeichnet, der Parallelwinkel für die Distanz AB oder c mit δ_c. Der Grenzbogen von B auf $\overrightarrow{AC}$ für die Axe $\overrightarrow{AC}$ treffe AC' in D, und AD sei gleich s. Alsdann ist nach (1.), wenn die Winkel des Dreiecks ABC wie gewöhnlich α, β, γ genannt werden:

$$\sin z' = \sin\gamma e^{-b-s} \qquad \left(s = \frac{s}{k}, \quad b = \frac{b}{k}\right),$$

$$\sin z'' = \sin\gamma e^{b-s}, \quad z''+z' = 180-2\beta,$$

$$z''-z' = 180-2\delta_c,$$

also

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{z''+z'}{2}}{\operatorname{tg}\frac{z''-z'}{2}} = \frac{e^b+e^{-b}}{e^b-e^{-b}}$$

oder

$$(2.) \qquad \frac{\cot\beta}{\cot\delta_c} = \operatorname{cothyp} b$$

und ebenso $\frac{\cot\gamma}{\cot\delta_b} = \text{cothyp}\, c$. Der Abkürzung halber mögen die hyperbolischen Functionen wie die goniometrischen bezeichnet werden; wenn die Functionszeichen sich auf die Masszahlen von Längen beziehen, so werde bemerkt, dass ein für alle Mal die hyperbolischen Functionen gemeint sind. Dann lautet (2.)

$$\cot\beta \operatorname{tg}\delta_c = \cot b.$$

Sei (Fig. 4) δ der Parallelwinkel für die Distanz AB gleich x; BD wieder der Grenzbogen, DA wieder gleich s; alsdann ist nach (1.)

$$\frac{\sin(\delta-\lambda)}{\sin\mu} = e^{-2s},$$

und da μ als Basiswinkel gleich $\delta+\lambda$ ist, so ist $\frac{\sin(\delta-\lambda)}{\sin(\delta+\lambda)} = e^{-2s}$, und da, wieder nach (1.), $e^{-s} = \sin\delta$, so ist

$$\frac{\sin(\delta-\lambda)}{\sin(\delta+\lambda)} = \frac{1}{\sin^2\delta} \quad \text{oder} \quad \frac{\cot\lambda}{\cot\delta} = \frac{1+\sin^2\delta}{1-\sin^2\delta},$$

oder

$$\text{(a.)} \qquad \cot\lambda\cos\delta = \frac{1}{\sin\delta} + \sin\delta.$$

Bezeichnet δ_1 den Parallelwinkel für die „abgeleitete" Distanz s, und r die abgeleitete Distanz von s, so ist

$$\frac{\sin(\delta_1-\mu)}{\sin\lambda} = e^{-x-r} = e^{-x}\sin\delta_1,$$

$$\frac{\sin(\delta_1-\mu)}{\sin\delta_1} = e^{-x}\sin\lambda; \quad \cot\delta_1 = \cot\mu - e^{-x}\frac{\sin\lambda}{\sin\mu};$$

aber nach (2.) ist $\cot\delta_1 = \cot\mu \operatorname{tg} x$, also

$$\cot\mu(1-\operatorname{tg}x) = e^{-x}\frac{\sin\lambda}{\sin\mu}; \quad \frac{\cos\mu}{\cos x} = \sin\lambda,$$

$$\cos x = \frac{\cos\mu}{\sin\lambda}, \quad \text{und da } \mu = \lambda+\delta,$$

$$\cos x = \cot\lambda\cos\delta - \sin\delta$$

und mit (a.)

$$\text{(3.)} \qquad \cos x = \frac{1}{\sin\delta}; \quad \sin\delta = \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\delta}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = e^{-x} \quad \text{oder} \quad \cot\frac{\delta}{2} = e^{x}, \quad (\cot\delta = \sin x;\ \cos\delta = \operatorname{tg}x)$$

welche Formel, wie bekannt, den Parallelwinkel als Function der Distanz giebt. Für die abgeleitete Distanz s folgt $e^s = \cos x$ und $\operatorname{tg}\frac{\delta_1}{2} = \sin\delta$.

Der Pythagoras.

Formel (2.) giebt, wenn sie mit Formel (3.) combinirt wird, sofort

$$(4^1.)\qquad \begin{cases} \cot\beta = \cot b \sin c, \\ \cot\gamma = \cot c \sin b. \end{cases}$$

Fällt man im rechtwinkligen Dreieck ABC die Höhe AD und bezeichnet die Stücke des rechten Winkels mit α_1 und α_2, die entsprechenden Höhenabschnitte mit a_1 und a_2 und berücksichtigt, dass $\cot\alpha_1 \cot\alpha_2 = 1$ ist, so erhält man

$$(4^2.)\qquad \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 = \sin^2 h \qquad .(h^2 = a_1 a_2).$$

Wendet man die Formel (4¹.) auf α_1 und β, wie α_2 und γ gleichzeitig an und multiplicirt die vier Gleichungen, so erhält man:

$$\cot\beta \cot\gamma \cot\alpha_1 \cot\alpha_2 = \cos a_1 \cos a_2 \cos^2 h$$

und mit Benutzung von (4².)

$$\cot\beta \cot\gamma = \cos b \cos c = \cos a_1 \cos a_2 + \sin a_1 \sin a_2 = \cos a,$$

also

$$(4^3.)\qquad \cot\beta \cot\gamma = \cos b \cos c = \cos a,$$

den Pythagoras.

Aus diesen Gleichungen folgt in bekannter Weise zunächst für das rechtwinklige Dreieck der Sinussatz

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma},$$

so wie die Formel

$$\cos\beta = \operatorname{tg} c \cot a, \quad \text{ferner} \quad \operatorname{tg}^2 c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} a_1 \qquad (c^2 = a a_1),$$

dann der Sinus- und Cosinussatz für alle Dreiecke, der Cosinussatz in der Form

$$\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos\alpha.$$

Da der Sinussatz bestehen bleibt, so behalten auch seine Folgerungen: Tangentialsatz, Menelaus, Ceva, anharmonisches Verhältniss, kurz alle sogenannten projectivischen Eigenschaften *(Felix Klein)* Gültigkeit; und ebenso wie die harmonische Theilung den Hauptgrund bietet, die Gerade in der gewöhnlichen Geometrie als im Unendlichen geschlossen zu betrachten, wer-

den wir durch sie veranlasst, die Gerade der absoluten Geometrie als im Imaginären geschlossen anzusehen.

Abstandslinie, Grenzbogen, Kreis.

1) Wegen der Conformität der Axe einerseits und der Abstandslinie andererseits ist das Verhältniss eines Abstandsbogens zur zugehörigen Axenstrecke nur von dem Abstande x selbst abhängig. Nimmt man die Axenstrecke AD der Figur 5 unendlich klein, so ist das Element der Abstandslinie das von B auf CD gefällte Loth, und wenn man sich der grundlegenden Eigenschaft der Parallelen erinnert, $\frac{AD}{BC} = \sin\delta$, wo δ den Parallelwinkel bezeichnet, also das gesuchte Verhältniss für beliebige Axenstrecke AD

$$(1.)\qquad \frac{\widehat{BC}}{AD} = \cos x$$

(in welcher Formel, wie wohl kaum bemerkt zu werden braucht, x für $\frac{x}{k}$ steht).

2) Für die Berechnung des Grenzbogens, für den x der Abstand der Axe aus einem Endpunkt vom anderen ist, bieten sich zwei Wege, der eine, Sehne BD durch x auszudrücken und durch fortgesetztes Halbiren die Grenzsehne gleich dem Bogenelement zu setzen, der andere durch Integration. Da der Grenzbogen auf der Axe senkrecht steht, so giebt der zweite Weg sofort (Fig. 6):

$$db = \frac{dx}{\cos(90-\delta)} = \frac{dx}{\sin\delta}, \quad db = dx\cos\frac{x}{k},$$

und da für $x = 0$ auch $b = 0$ ist, $\frac{b}{k} = b = \sin x$, wodurch zugleich der complicirte limes, der bei der ersten Methode auftritt $\left(\cos BD = \frac{\cos^2 x + 1}{2}\right)$, ausgewerthet ist.

3) Da der Kreis auf dem Radius senkrecht steht, so giebt die zweite Methode hier direct (Fig. 7):

$$\frac{\sin\frac{db}{k}}{\sin d\varphi} = \sin\frac{r}{k}; \quad \frac{db}{k} = \sin\frac{r}{k}\,d\varphi,$$

$$\frac{b}{k} = \sin\frac{r}{k}\cdot 2\pi \quad \text{oder} \quad \bigcirc r = 2\pi\sin r = 2\pi g,$$

wenn g der Grenzbogen, dessen Axenabstand r ist, eine Beziehung, welche sich durch die Grenzmethode, da die Sehne des Quadranten $\cos^2 r$ ist, auch

wohl direct nachweisen liesse. Man kann auch ganz wie in der gewöhnlichen Geometrie vom ein- und umgeschriebenen regulären n-Eck ausgehen. Wenn s_n und σ_n die Seiten des ein- und umgeschriebenen regulären n-Ecks bedeuten, so ist

$$\sin\frac{s_n}{2} = \sin r . \sin\frac{\pi}{n},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma_n}{2} = \sin r . \operatorname{tg}\frac{\pi}{n};$$

wird n hinlänglich gross, so ist

$$\frac{s_n}{2} = \frac{\sigma_n}{2} = \frac{K}{2n} = \sin r\frac{\pi}{2}$$

und folglich

$$K = 2\pi\sin r.$$

Flächenmessung.

Sei n eine Zahl, hinlänglich gross, so dass $\frac{k}{n}$ verschwindend klein und $\operatorname{tg}\frac{k'}{2n} = e^{-\frac{1}{n}} = 1$, d. h. also ein Streifen von der Breite $\frac{k}{n}$ als Streifen der gewöhnlichen Geometrie angesehen werden kann; alsdann gelten für diesen Streifen die Sätze der gewöhnlichen Geometrie, es giebt Rechtecke, Quadrate etc. Das Quadrat mit der Seite $\frac{k}{n}$ ist als μ das Mass für die Flächenelemente, $n\mu$ kann nicht*) als Rechteck mit der Seite k und $\frac{k}{n}$ angesehen werden, es sei ϱ, und dient als Mass für die Flächen, welche in einer Richtung endliche Ausdehnung haben; $n\varrho$, welches dem Quadrat mit der Seite k der gewöhnlichen Geometrie entsprechen würde, sei als F das Mass für endliche Flächen.

1) Fläche des Abstandsrechtecks. Denke ich mir den Abstand x wie die Axe a in n gleiche Theile getheilt, welche Theilung geometrisch durchführbar, sobald n von der Form 2^{λ}, so erhalte ich für den Inhalt des p^{ten} Streifens σ zwischen zwei Abstandslinien in den Abständen $(p-1)\frac{x}{n}$ und $p\frac{x}{n}$

$$\frac{\sigma}{\varrho} = \left(\frac{x}{n}:\frac{k}{n}\right)\cdot\left(a\cos\frac{p}{n}\frac{x}{k}:k\right); \quad \frac{\sigma}{\varrho} = \frac{x}{k}\cdot\frac{a}{k}\cdot\cos\frac{p}{n}\cdot\frac{x}{k},$$

*) Die Bemerkung *Lobatschewskys*, dieses Journ. Bd. 17 S. 302, ist nur für Differentiale 2. Ordnung der Flächen giltig, wie in einer folgenden Abhandlung näher ausgeführt wird.

$$\frac{J}{\varrho} = \frac{x}{k}\cdot\frac{a}{k}\sum_1^{n-1}{}_p \cos\frac{p}{n}\cdot\frac{x}{k} = \frac{x}{k}\cdot\frac{a}{k}\left(\frac{e^{\frac{x}{k}}-1}{\frac{x}{nk}} + \frac{e^{-\frac{x}{k}}-1}{\frac{-x}{nk}}\right),$$

$$\frac{J}{\varrho} = n\frac{a}{k}\sin\frac{x}{k}, \quad \text{also} \quad \frac{J}{F} = \frac{a}{k}\sin\frac{x}{k}, \quad \text{d. h.} \quad J = a\sin x,$$

wenn die Grössen und ihre Masszahlen wieder gleich bezeichnet werden.

2) Das Maximaldreieck. Sei Fig. I das halbe Maximaldreieck. Ich denke mir zu beliebigen Abscissen x_1, x_2, ... die Ordinaten y_1, y_2, ... bis an die Asymptote, so zerlegt sich die Fläche des halben Maximaldreiecks in Theile. Wir betrachten den p^{ten} Theil s_p. Weil die y *fortwährend* fallen, so liegt $\frac{s_p}{F}$ oder s_p zwischen $(x_p-x_{p-1})\sin y_p$ und $(x_p-x_{p-1})\sin y_{p-1}$, und es wird ein η_p geben, so dass genau $s_p = (x_p-x_{p-1})\sin\eta_p$. Es ist aber $\sin\eta_p = (e^{2\xi_p}-1)^{-\frac{1}{2}}$, wo ξ_p zwischen x_{p-1} und x_p. Sei $\sin\eta_p = w_p^{-1}$, so ist $s_p = (x_p-x_{p-1})w_p^{-1}$. Es ist $2\xi_p = \log(w_p^2+1)$ und $2x_p = \log(v_p^2+1)$.

Lässt man die Punkte x_1, x_2 immer dichter auf einander folgen, so wird w_p nahezu $= v_p$, und da $\log\frac{1+a^2}{1+b^2} = \log\left(1+\frac{a^2-b^2}{1+b^2}\right)$, so geht x_p-x_{p-1} über in

$$\frac{\frac{1}{2}(v_p-v_{p-1})(v_p+v_{p-1})}{v_{p-1}^2+1} : \frac{s_p}{F} = \frac{1}{2}\frac{v_p+v_{p-1}}{w_p}\cdot\frac{v_p-v_{p-1}}{v_{p-1}^2+1},$$

$\frac{s_p}{F} = \frac{v_p-v_{p-1}}{v_{p-1}^2+1}$, wo es erlaubt ist, statt v_p jeden Zwischenwerth zwischen v_p und v_{p-1} zu setzen, also auch $v_{p-1}^2 = v_{p-1}v_p$. Man setze $v_p = \operatorname{tang}\nu_p$, alsdann ist $\frac{s_p}{F} = \operatorname{tg}(\nu_p-\nu_{p-1})$. Da $v_0 = 0$, so müssen die Bogen alle zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ genommen werden, da dann die Bogen mit v beständig wachsen.

$$\frac{J}{F} = \operatorname{tg}(\nu_1-\nu_0)+\operatorname{tg}(\nu_2-\nu_1)+\cdots+\operatorname{tg}(\nu_p-\nu_{p-1}),$$

und da für hinlänglich kleine Differenz die Tangente gleich dem arcus ist:

$$\frac{J}{F} = \nu_n = \operatorname{arctg} v_n,$$

also das Flächenstück zwischen den Schenkeln des rechten Winkels und einer beliebigen Abscisse gleich y', und wenn $x = \infty$, $\frac{J}{F} = \frac{\pi}{2}$ und das ***Maximaldreieck*** $M = F\pi$.

3) Ein beliebiges Dreieck mit den Winkeln α, β, γ und dem Excess

$180-(\alpha+\beta+\gamma)=e$ verhält sich zu M wie $e:180$, also für das Dreieck

$$J = F\pi\left(1-\frac{\pi\alpha}{180}-\frac{\pi\beta}{180}-\frac{\pi\gamma}{180}\right),$$

d. h. also $J=F(\pi-(\alpha+\beta+\gamma))$, wo α, β, γ die Arcus der Winkel α, β, γ bezeichnen, also $J=Fe$.

4) Sei DB (Fig. II.) ein Grenzbogen, es soll die Fläche ABD ausgewerthet werden. Zwischen Abscisse x und Ordinate y besteht die Gleichung $e^x=\cos y$. Es ist wieder

$$\frac{s_p}{F} = \frac{(x_p-x_{p-1})}{k}\sin\frac{\eta_p}{k},$$

da y mit x fortwährend wächst.

$$\frac{s_p}{F} = (x_p-x_{p-1})\sqrt{e^{2\xi_p}-1}.$$

Setzt man die Wurzel $=w_p$, so erhält man wieder wie vorher durch Umformung von x_p-x_{p-1}:

$$s_p = \frac{(v_p-v_{p-1})\frac{1}{2}(v_p+v_{p-1})w_p}{v_{p-1}^2+1};\quad s_p = \frac{(v_p-v_{p-1})w_p^2}{v_{p-1}^2+1},$$

da w_p als Mittelwerth wieder erlaubt ist.

$$s_p = v_p-v_{p-1}-\frac{v_p-v_{p-1}}{v_{p-1}^2+1},\quad J = v_n-\operatorname{arctg} v_n,$$

$$J = \sin y-\operatorname{arctg}\sin y = \sin y-\left(\frac{\pi}{2}-y'\right),$$

$\frac{J}{F}=\sin y-$Dreieck ABZ und folglich die Fläche zwischen den beiden Axen und dem Grenzbogen, d. h. also der Grenzsector $s=\sin y$, wo y die halbe Sehne des doppelten Bogens, und da $\sin y$ der Grenzbogen, so sind Grenzsector und Grenzbogen der Masszahl nach *gleich*.

5) Kreis. (Fig. III.) a) Segment zwischen den Abscissen a und b und den Ordinaten A und B. Es ist $\cos r=\cos x\cos y$, und da wieder x von a bis b wächst, y von A bis B beständig fällt, so ist wieder $s_p=(x_p-x_{p-1})\sin\eta_p$,

$$s_p = (x_p-x_{p-1})\frac{\sqrt{\cos^2 r-\cos^2\xi_p}}{\cos\xi_p}.$$

Sei $\cos r=c$ und werde $\cos^2 r-\cos^2 x=t^2\sin^2 x$ gesetzt,

$$s_p = (x_p-x_{p-1})\frac{\sin\xi_p}{\cos\xi_p}\cdot\tau_p.$$

Es ist:

$$\cos^2 x_p - \cos^2 x_{p-1} = \sin(x_p + x_{p-1})\sin(x_p - x_{p-1}) = f(t_p;\, t_{p-1})$$
$$= 2\sin\xi_p \cos\xi_p (x_p - x_{p-1}),$$

$$s_p = f\frac{(t_p;\, t_{p-1})\tau_p}{2\cos^2\xi_p}\,;\quad s_p = \frac{\tau_p(t_p + t_{p-1})(t_p - t_{p-1})(1-c^2)(1+\tau_p^2)}{2(t_p^2+1)(t_{p-1}^2+1)(c^2+\tau_p^2)},$$

$$s_p = \frac{\tau_p^2(1-c^2)(t_p - t_{p-1})}{(c^2+t_p^2)(t_{p-1}^2+1)} = \frac{(t_p - t_{p-1})}{t_p^2+1} - \frac{c^2(t_p - t_{p-1})}{c^2+t_{p-1}^2},$$

$$S = \operatorname{arctg} t_b - \operatorname{arctg} t_a - c \operatorname{arctg}\frac{t_b}{c} + c\operatorname{arctg}\frac{t_a}{c}\,.$$

Ist $a = 0$, so ist $S = \operatorname{arctg} t_b - c\operatorname{arctg}\frac{t_b}{c}$; und ist $b = r$, so ist

$$S = \frac{\pi}{2}(c-1) = \frac{\pi}{2}(\cos r - 1)$$

und folglich der Kreis $K = 4\pi \sin^2\frac{r}{2}$.

b) Der Sector. (Fig. IV.) Habe der Centriwinkel zur Ebene das Verhältniss λ, so ist, da der Kreisbogen $= \lambda 2\pi \sin\varrho$,

$$s_p = \lambda 2\pi \sin\varrho_{p-1}(r_p - r_{p-1}),$$
$$s_p = \lambda 2\pi\, 2\sin\frac{r_p + r_{p-1}}{2}\sin\frac{(r_p - r_{p-1})}{2},$$
$$s_p = \lambda 2\pi\, 2(\sin^2\tfrac{r_p}{2} - \sin^2\tfrac{r_{p-1}}{2}),$$

$$\text{Sector} = \lambda 4\pi \sin^2\frac{r}{2},$$

oder wenn man den Bogen σ einführt,

$$\text{Sector} = \sigma \operatorname{tg}\frac{r}{2}\,.$$

Ein anderes Verfahren, welches dem in der gewöhnlichen Planimetrie üblichen entspricht, besteht darin, dem Sector n congruente gleichschenklige Dreiecke einzuschreiben, deren Spitze der Mittelpunkt ist, und jedes dieser Dreiecke als das doppelte des rechtwinkligen anzusehen, und n über jedes Mass wachsen zu lassen. Aus der Formel für das rechtwinklige Dreieck leitet man ohne Mühe, wenn die eine Kathete unendlich klein ist, die Formel ab:

$$\operatorname{tg}(\beta+\gamma) = \cot c \cot\frac{b}{2} \quad \text{und damit} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - (\beta+\gamma)\right) = \operatorname{tg} c \operatorname{tg}\frac{b}{2},$$

also für die $2n^{\text{ten}}$ Theile des Sectors, wenn e den Excess bedeutet:

$$\mathrm{tg}\, e = \mathrm{tg}\, c\, \mathrm{tg}\frac{b}{2}; \quad e = c\, \mathrm{tg}\frac{b}{2} = \frac{\sigma}{2n}\mathrm{tg}\frac{r}{2}$$

und somit der Sector $= \sigma\, \mathrm{tg}\frac{r}{2}\cdot$ Die erste Methode ist vorzuziehen, sie bildet ein Beispiel für die Zweckmässigkeit der *Riemann*schen Definition des bestimmten Integrales*).

Projectivität.

Die harmonische Theilung liefert Veranlassung zu einigen Bemerkungen. Da der Sinussatz und damit der grundlegende Satz: „Jedes Punktsystem ist Träger doppelt unzählig vieler Strahlensysteme und umgekehrt" erhalten bleibt, da ferner die Eindeutigkeit des vierten harmonischen Punktes in Folge der imaginären Periode des hyperbolischen Sinus bestehen bleibt, so gelten neben den Sätzen des Menelaos, Ceva etc. auch die Sätze vom vollständigen Vierseit und Viereck und damit das gesammte Satzgebiet, Pol und Polare etc., und vor allem bleibt die synthetische Definition der Kegelschnitte als Ort der Schnitte zweier projectivischen Strahlbüschel erhalten; aber es ist nicht uninteressant, dass auch der Gang des *elementaren* Unterrichts, wie er sich im Anschluss an *Steiners* „Geometrische Constructionen etc." entwickelt hat, fast völlig intact bleibt; namentlich bleiben die Kreissätze und Constructionen in allen vier Geometrien völlig gleich. Die erste Construction, welche auf dem Satz beruht: Wird zwischen einem Dreistrahl *eine* Strecke gehälftet, so wird es auch jede ihr parallele, ändert sich nur insofern, als an die Stelle der Parallelen Senkrechte auf denselben vom Scheitel des Büschels ausgehenden Geraden treten (Mitsenkrechte). Gegeben AC, errichte in A und C Lothe auf AC gleich lang nach beiden Seiten, — h und h_1 —, verbinde ihre gleich und ihre wechselseitig liegenden Endpunkte, schneiden AC in x und y, so ist AC in x und y harmonisch getheilt.

$$[\sin Ax : \sin Cx = \mathrm{tg}\, h : \mathrm{tg}\, h_1 \quad \text{und} \quad \sin Ay : \sin Cy = \mathrm{tg}\, h : \mathrm{tg}\, h_1].$$

Hierbei lassen sich wie sonst zwei Linien und ein Loth sparen.

Die Umformung der Grundrelation, welche, wenn man die Mitte von AC mit M, die Länge von AC mit $2s$, und Mx und My mit x und y be-

*) Die zweckmässige Form für das Raumelement ist $d^3V = dz\,dl\,d\varphi \cos l \sin l$, welche z. B. für den Cylinder ergiebt $\pi \log \cos r$, d. h. π mal der abgeleiteten Distanz; für das vollständige Maximalprisma ergiebt sich $\sum\limits_{0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}\cdot$

zeichnet, $s^2 = xy$ lautet, geht über in $\mathrm{tg}^2 s = \mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y$, woraus erhellt, dass die zweite Construction — Ziehen der Tangenten von y an den Kreis, dessen Durchmesser AC, und Bestimmung von x als Schnitt der Axe und der Berührungssehne — sich gar nicht ändert (wenn s Kathete, y Hypotenuse, x der s anliegende Höhenabschnitt desselben rechtwinkligen Dreiecks, so ist $\mathrm{tg}^2 s = \mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y$). (Für den endlichen Raum gilt dieselbe Construction, nur bezeichnet tg die betreffende Kreisfunction.) Ebenso bleibt die Construction mittelst der gemeinschaftlichen Tangenten in allen Geometrien, denn in allen theilen die gemeinschaftlichen inneren und äusseren Tangenten die Centrale harmonisch im (Sinus) Verhältniss der Radien. Mit dem Potenzsatz, der die Form annimmt: „Das Product aus den Tangenten (hyperbolisch im absoluten, cyklisch im endlichen Raume) der halben Abschnitte sich im selben Punkt schneidender Sehnen ist constant“, bleiben die Sätze des Apollonius. Die Linearconstruction des vierten harmonischen Punktes oder Strahls beharrt mit dem Satz vom vollständigen Vierseit unangetastet in allen Raumformen und damit auch schliesslich die ganze Lehre von Pol und Polare. Auffallend ist, dass der Satz gültig bleibt: Die Verbindungslinien der Kreispunkte, entweder über Kreuz oder gleichliegend, zweier vom selben Punkt y symmetrisch zur Axe gezogenen Sehnen schneiden sich auf der Axe in dem zu y conjugirten vierten Punkte, d. h. die Bogen bleiben gleich, während die Peripheriewinkel verschieden sind. Die Discussion der Gleichung $s^2 = xy$ gehört eigentlich vor die Lehre von Pol und Polare; hier treten in der absoluten Geometrie dem einen ausgezeichneten Punkte M, dem Mittelpunkte von AC, noch die entsprechenden der beiden unendlich fernen zur Seite, die „Parallelpunkte“. Zunächst liegen wieder x und y an derselben Seite von M: bewegt sich y von C nach rechts, so geht x von C nach links, nach M zu, ist y im Unendlichen rechts, so ist x rechts von M im rechten Parallelpunkte G, bestimmt durch die Gleichung $\mathrm{tg}g = \mathrm{tg}^2 s$. Auf diese Beziehung, oder auf die noch merkwürdigere $\sin AG : \sin CG = e^{2s}$, also *gleich dem zur Strecke AC gehörigen Grundverhältniss der absoluten Geometrie,* lässt sich eine *zweite Parallelenconstruction* gründen, wenn die Parallelendistanz λ zu 45^0 gegeben ist.

Ist (Fig. 9) AM gleich s, AE senkrecht AM gleich λ, so ist $\mathrm{tg}AEM = \mathrm{tg}s$, wird in E an AE der Winkel von 45^0 angelegt und durch M die Abstandslinie für AE gezogen, welche den freien Schenkel in N trifft, ist NP senkrecht AE, also gleich AM, so ist $\sin EP$ gleich $\mathrm{tg}s$ und schliesslich, wenn PN EM in Q schneidet, PQ gleich g. Oder: Ziehe von A und C die

nach rechts concentrischen beliebigen Grenzbogen AD und CF, fälle von AD und CF die Lothe r und ϱ auf AC, schlage um A mit r und um C mit ϱ Kreise, so trifft die gemeinsame innere Tangente AC im Parallelpunkt g. Es mag bemerkt werden, dass, wenn F' der Gegenpunkt von F für AC ist und DF' die Axe in S schneidet, auch $DS:F'S = e^{2s}$ ist. Aus der zuerst angegebenen Construction folgt, wenn h mit d und h_1 mit y bezeichnet wird, ohne alle Rechnung die Gleichung der Parallelen im Abstand d in gewöhnlichen Coordinaten $\sin AG : \sin CG = \operatorname{tg} d : \operatorname{tg} y = e^x$ oder $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} d e^{-x}$. Die Parallelenconstruction ist identisch mit der Aufgabe, eine gegebene Strecke s in ihrem eigenen Grundverhältniss e^s zu theilen. Bewegt sich x von G weiter nach M, so wird y imaginär. Nichtschneidende müssen also als im Imaginären schneidende angesehen werden. Ist x in M, so ist $y = \frac{\pi}{2} i$. Die Nothwendigkeit, für M keine Ausnahme eintreten zu lassen, ist in der Euklidischen Geometrie der Hauptgrund, die Gerade als im Unendlichen geschlossen anzusehen und den unendlich fernen Punkt als den Schnitt aller Parallelen zu betrachten. Hier tritt an seine Stelle der Punkt, welcher von M nach beiden Seiten die Entfernung $\frac{\pi}{2} i$ hat, die Gerade ist im Imaginären geschlossen in diesem Punkte, in ihm schneiden sich alle zu AC Mitsenkrechten. ***Die Gesammtlänge der Geraden ist daher πi und nicht $2\pi i$, und die absolute Geometrie entspricht nicht der Riemannschen, sondern der Kleinschen Raumform.*** Die Angabe von ***Frischauf*** § 79 ist dahin zu ergänzen, dass die Abstandslinien auf beiden Seiten der Axe zusammen den Kreis mit Radius $a + \frac{\pi}{2} i$ bilden, und die Gerade als Grenzfall doppelt zu denken ist.

---

obige zu bilden, welche aber nur eine Nullstelle und eine Unbestimmtheitsstelle besitzt und daher den durch Herrn *Weierstrass* in die Theorie der eindeutigen Functionen einer Veränderlichen eingeführten Primfunctionen entspricht. In der That gelingt es leicht, eine solche Function zu bilden, welche anscheinend auch in der eigentlichen Theorie der *Abel*schen Functionen die obenerwähnte Function zu ersetzen im Stande ist*).

I.

Wenn eine veränderliche Grösse z zu dem Paare (x, y), wo x, y durch eine irreductible algebraische Gleichung vom Range ϱ

$$f(x, y) = 0$$

verbunden sind, in der Beziehung steht, dass jedem Werthepaar (x, y) (mit Ausnahme einzelner) stets ein und nur ein bestimmter Werth von z entspricht, so heisst z eine eindeutige Function $F(x, y)$ des Paares (x, y).

In der Umgebung einer nichtsingulären Stelle (a, b) des algebraischen Gebildes können bekanntlich x und y auf unendlich viele Weisen durch ein Functionenpaar

$$(1.)\qquad \begin{cases} x-a = t.\mathfrak{P}_1(t) \\ y-b = t.\mathfrak{P}_2(t) \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} x = x_t \\ y = y_t \end{matrix}$$

in der Art dargestellt werden, dass jedem Werthepaar (x, y) in hinlänglicher Nähe von (a, b) nur *ein* Werth von t entspricht; die Gleichungen (1.) stellen ein *Element* des algebraischen Gebildes dar. Dies gilt auch für unendliche a oder b, wenn wir nach Herrn *Weierstrass* unter $x-a$ für $a = \infty$ oder $y-b$ für $b = \infty$ die Ausdrücke $\frac{1}{x}$, bezw. $\frac{1}{y}$ verstehen. Für die singulären Stellen reicht doch stets eine endliche Anzahl von Functionenpaaren (1.) zur Darstellung ihrer Umgebung aus.

Wenn nun ferner jedem dieser Elemente des Gebildes eine Entwickelung von $z = F(x, y)$ nach irgendwelchen ganzen Potenzen von t entspricht, so nennen wir $F(x, y)$ eine eindeutige analytische Function des Paares (x, y); nur Functionen dieser Art werden hier betrachtet.

Wir können die einzelnen Elemente des algebraischen Gebildes da-

---

*) Wie mir Herr *Weierstrass* nachträglich mittheilte, hat er eine Function dieser Art in Vorlesungen über *Abel*sche Functionen vor längerer Zeit einmal benutzt; in der Theorie der *hyperelliptischen* Functionen ist eine solche noch neuerdings (Vorlesung vom Sommer 1887) aufgestellt worden.

$$(3.)\qquad \Sigma\left[F(x_t,\ y_t)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}} = 0$$

ausgedrückt werden kann (*Appell*, a. a. O. S. 116), wobei die Summe auszudehnen ist über alle Elemente des Gebildes, für welche die zugehörige Entwickelung von $F(x_t, y_t)\frac{dx_t}{dt}$ negative Potenzen von t enthält. Mit Hülfe der Darstellung (2.) können wir diesen Satz einfach daraus folgern, dass das Integral

$$\int \chi(\tau).\varphi'(\tau)d\tau$$

(erstreckt über die Begrenzung des Fundamentalpolygons) den Werth Null hat, wenn — was stets vorausgesetzt werden kann — auf dieser Begrenzung keine singulären Punkte von φ, χ liegen (vgl. hierzu *Humbert*, a. a. O. S. 247).

II.

Bevor wir weiter gehen, stellen wir der Uebersichtlichkeit wegen diejenigen Entwickelungen aus den Vorlesungen des Herrn *Weierstrass*, welche wir im Folgenden zu benutzen haben, nach der oben angeführten Abhandlung des Herrn *Hettner* noch einmal kurz zusammen.

Es giebt stets eine und nur eine rationale Function des Paares (x, y), die, wenn ϱ der *Rang* des Gebildes ist, an $\varrho+1$ beliebigen Stellen $(a_1, b_1), \ldots, (a_\varrho, b_\varrho), (x', y')$ (von denen wir aber annehmen, dass sie nicht zu den singulären Stellen des Gebildes gehören) je unendlich erster Ordnung wird, und zwar an der Stelle (x', y') wie $\frac{1}{x'-x}$, und welche ferner an einer weiteren beliebigen Stelle (a_0, b_0) verschwindet. Diese Function ist zugleich eine rationale Function des Paares (x', y'); wir bezeichnen sie mit $H(x, y; x', y')$. Bedeutet $(\overset{a}{x}_t, \overset{a}{y}_t)$ das Functionenpaar für die Umgebung der Stelle (a_α, b_α) $(\alpha = 1, \ldots \varrho)$, so ist

$$(1.)\qquad H(\overset{a}{x}_t, \overset{a}{y}_t;\ x', y') = t^{-1}.H(x', y')_\alpha + \mathfrak{P}(t),$$

und hier sind die rationalen Functionen $H(x', y')_\alpha$ ϱ linear unabhängige Integranden erster Gattung, welche dadurch ausgezeichnet sind, dass sie in der Umgebung *jeder beliebigen* Stelle (x, y) des Gebildes eine Entwickelung von der Form

$$(2.)\qquad H(x_t,\ y_t)_\alpha \frac{dx_t}{dt} = \sum_{\mu=0}^{\infty} h(x,\ y)_{\alpha,\mu+1}.t^\mu, \qquad (\alpha = 1, \ldots \varrho)$$

besitzen, wo $h(x, y)_{\alpha,\mu+1}$ eine rationale Function des Paares bezeichnet.

Setzt man

$$(3.)\qquad H(x,\,y;\;x',\,y')_\mu \;=\; -\left[H(x,\,y;\;x'_t,\,y'_t)\frac{dx'_t}{dt}\right]_{t^\mu},$$

((x'_t, y'_t) bezeichnet das Functionenpaar für die Umgebung von (x', y')), so können die Eigenschaften der so definirten rationalen Functionen durch folgende Gleichungen ausgedrückt werden:

$$(4.)\qquad \begin{cases} H(x'_t,\,y'_t;\;x',\,y')_\mu \;=\; t^{-\mu-1}+\mathfrak{P}(t), \\ H(\overset{a}{x}_t,\,\overset{a}{y}_t;\;x',\,y')_\mu \;=\; -t^{-1}.h(x',\,y')_{a,\mu+1}+\mathfrak{P}(t), \\ H(x_t,\,y_t;\;x',\,y')_\mu \;=\; \mathfrak{P}(t), \end{cases}$$

wenn (x_t, y_t) irgend ein beliebiges, nur nicht zu einer Stelle (a_a, b_a) oder zu (x', y') gehöriges Functionenpaar bedeutet.

Wir bemerken ferner, dass die Eigenschaften von $H(x, y;\, x', y')$, als Function von (x', y') aufgefasst, durch die Gleichungen

$$(5.)\qquad \begin{cases} H(x,\,y;\;\overset{0}{x}_t,\,\overset{0}{y}_t)\dfrac{d\overset{0}{x}_t}{dt} \;=\; -t^{-1}+\mathfrak{P}(t), \\ H(x,\,y;\;x_t,\,y_t)\dfrac{dx_t}{dt} \;=\; t^{-1}+\mathfrak{P}(t), \\ H(x,\,y;\;x'_t,\,y'_t)\dfrac{dx'_t}{dt} \;=\; \mathfrak{P}(t) \end{cases}$$

ausgedrückt werden, in denen $(\overset{0}{x}_t, \overset{0}{y}_t)$ das Functionenpaar für (a_0, b_0), (x_t, y_t) dasjenige für (x, y), (x'_t, y'_t) ein beliebiges anderes bedeutet. Daher kann $H(x, y;\, x', y')$ als Function von (x', y') nur unendlich werden, wenn $(x', y') = (a_0, b_0)$ oder $= (x, y)$, oder $x' =$ einer der Verzweigungsstellen der algebraischen Function y' von x' wird; dasselbe gilt von den $H(x, y;\, x', y')_\mu$.

Die Functionen $H(x, y;\, x', y')_\mu$ dienen zur Darstellung der rationalen Functionen des Paares (x, y), die an gegebenen Stellen in vorgeschriebener Weise unendlich werden; soll z. B. eine solche Function nur an *einer* Stelle (a, b) des Gebildes, und zwar von der Ordnung k, unendlich werden, so kann sie in der Form

$$(6.)\qquad \Phi(x,\,y) \;=\; C_0+\sum_{i=1}^{k} C_i H(x,\,y;\;a,\,b)_{i-1}$$

dargestellt werden, wobei aber die C_i den Bedingungen

$$(7.)\qquad \sum_{i=1}^{k} C_i.h(a,\,b)_{a,i} \;=\; 0 \qquad\qquad (a=1,\ldots\varrho)$$

genügen müssen, welche ausdrücken, dass $\Phi(x, y)$ nur dann an einer der

Stellen (a_α, b_α) unendlich wird, wenn diese mit (a, b) zusammenfällt; man erhält diese Relationen auch aus

$$\Sigma\left[\Phi(x_t, y_t).H(x_t, y_t)_\alpha \frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}} = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots \varrho).$$

Die Aufgabe, eine solche Function zu bilden, ist hiernach nicht für beliebige Zahlen k lösbar. Herr *Weierstrass* hat in seinen Vorlesungen gezeigt, dass zu *jeder beliebigen* Stelle (a, b) des Gebildes immer eine Reihe von genau ϱ Zahlen $k_1, \dots k_\varrho$ gehört, für welche diese Aufgabe unlösbar ist. (Vgl. *Schottky,* dieses Journal Bd. 83, S. 315; der Satz ist dann auch von Herrn *Nöther,* ebenda Bd. 97, S. 224, bewiesen worden). Wir bemerken noch, dass alsdann die Determinante

$$|h(a, b)_{\alpha, k_\beta}| \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots \varrho)$$

von Null verschieden ist, wie man leicht findet.

III.

Dies vorausgesetzt, bilde man den Ausdruck

$$\mathfrak{H}(x, y; x', y') = H(x, y; x', y') + \sum_{\beta=1}^{\varrho} C_\beta . H(x, y; a, b)_{k_\beta - 1}$$

und bestimme die C_β aus den Gleichungen

$$\sum_{\beta=1}^{\varrho} C_\beta h(a, b)_{\alpha, k_\beta} = H(x', y')_\alpha \qquad (\alpha = 1, \dots \varrho),$$

also in der Form

$$C_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\varrho} c_{\alpha,\beta} H(x', y')_\alpha = \mathfrak{H}(x', y')_\beta \qquad (\beta = 1, \dots \varrho),$$

wo nun auch die $\mathfrak{H}(x', y')_\beta$ linear unabhängige Integranden erster Gattung bedeuten, welche an jeder beliebigen Stelle des Gebildes eine Entwickelung

$$\mathfrak{H}(x_t, y_t)_\alpha \frac{dx_t}{dt} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{h}(x, y)_{\alpha, \mu+1} . t^\mu \qquad (\alpha = 1, \dots \varrho)$$

besitzen.

Die rationale Function

$$(1.) \qquad \mathfrak{H}(x, y; x', y') = H(x, y; x', y') + \sum_{\beta=1}^{\varrho} \mathfrak{H}(x', y')_\beta H(x, y; a, b)_{k_\beta - 1}$$

hat dann, als Function des Paares (x, y) betrachtet, folgende Eigenschaften:

a) An der Stelle (x', y') wird sie in derselben Weise unendlich wie $H(x, y; x', y')$, d. h.

$$(2.) \qquad \mathfrak{H}(x'_t, y'_t; x', y') = -t^{-1} + \mathfrak{P}(t);$$

b) ausserdem wird sie nur noch unendlich an der Stelle (a, b), und zwar besitzt sie daselbst die Entwickelung

$$(3.)\qquad \mathfrak{H}(\bar{x}_t, \bar{y}_t;\; x', y') = \sum_{\beta=1}^{\varrho} \mathfrak{H}(x', y')_\beta . t^{-k_\beta} + \mathfrak{P}(t)$$

(wir bezeichnen auch im Folgenden immer mit $(\bar{x}_t, \bar{y}_t)$ das Functionenpaar für die Umgebung von (a, b));

c) sie verschwindet an der Stelle (a_0, b_0):

$$(4.)\qquad \mathfrak{H}(a_0, b_0;\; x', y') = 0.$$

Setzen wir

$$(5.)\qquad \mathfrak{H}(x, y;\; x', y')_\mu = -\left[\mathfrak{H}(x, y;\; x'_t, y'_t)\frac{dx'_t}{dt}\right]_{t^\mu},$$

so folgt aus (1.)

$$\mathfrak{H}(x, y;\; x', y')_\mu = H(x, y;\; x', y')_\mu - \sum_{\beta=1}^{\varrho} \mathfrak{h}(x', y')_{\beta.\mu+1} . H(x, y;\; a, b)_{k_\beta - 1},$$

daher gelten für diese Functionen die Gleichungen

$$(6.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{H}(x'_t, y'_t;\; x', y')_\mu = t^{-\mu-1} + \mathfrak{P}(t), \\ \mathfrak{H}(\bar{x}_t, \bar{y}_t;\; x', y')_\mu = -\sum_{\beta=1}^{\varrho} \mathfrak{h}(x', y')_{\beta.\mu+1} . t^{-k_\beta} + \mathfrak{P}(t), \\ \mathfrak{H}(\bar{x}_t, \bar{y}_t;\; a, b)_\mu = -\sum_{\beta=1}^{\varrho} \mathfrak{h}(a, b)_{\beta.\mu+1} . t^{-k_\beta} + t^{-\mu-1} + \mathfrak{P}(t), \\ \mathfrak{H}(x_t, y_t;\; x', y')_\mu = \mathfrak{P}(t), \end{cases}$$

wo in letzterer Gleichung auch $(x', y') = (a, b)$ sein kann.

Ueber die Eigenschaften von $\mathfrak{H}(x, y;\; x', y')$ und $\mathfrak{H}(x, y;\; x', y')_\mu$ als Functionen von (x', y') ist dasselbe zu sagen, wie über die von $H(x, y;\; x', y')$ und $H(x, y;\; x', y')_\mu$; insbesondere gelten die Gleichungen (vgl. II, (5.))

$$(7.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{H}(x, y;\; \overset{0}{x}_t, \overset{0}{y}_t)\,\dfrac{d\overset{0}{x}_t}{dt} = -t^{-1} + \mathfrak{P}(t), \\ \mathfrak{H}(x, y;\; x_t, y_t)\,\dfrac{dx_t}{dt} = t^{-1} + \mathfrak{P}(t), \\ \mathfrak{H}(x, y;\; x'_t, y'_t)\,\dfrac{dx'_t}{dt} = \mathfrak{P}(t), \end{cases}$$

welche zeigen, dass

$$\int \mathfrak{H}(x', y';\; x, y)\,dx$$

(ebenso wie $\int H(x', y';\; x, y)\,dx$) ein Integral dritter Gattung mit den Parametern x', a_0 ist.

Die Gleichungen (2.)—(7.) ergeben sich in einfacher Weise aus den in II. angeführten Entwickelungen. — Man kann die Function $\mathfrak{H}(x, y; x', y')$ auch unabhängig von $H(x, y; x', y')$ einführen; indessen erschien es hier zweckmässig, die bereits veröffentlichten Entwickelungen aus den Vorlesungen des Herrn *Weierstrass* zu benutzen.

IV.

Wenden wir (wie es in den Vorlesungen des Herrn *Weierstrass* geschieht) die Gleichung (3.), No. I, auf die rationale Function

$$F(x, y) = \mathfrak{H}(x, y;\ x', y')\cdot\frac{d}{dx}\mathfrak{H}(x, y;\ x'', y'')$$

an, so kann die hieraus sich ergebende Gleichung

$$\Sigma\Big[\mathfrak{H}(x_t, y_t;\ x', y')\cdot\frac{d}{dt}\mathfrak{H}(x_t, y_t;\ x'', y'')\Big]_{t^{-1}} = 0$$

(wenn wir im Endergebniss (x, y) für (x'', y'') schreiben) auch auf folgende Form gebracht werden:

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\mathfrak{H}(x, y;\ x', y') - \dfrac{d}{dx'}\mathfrak{H}(x', y';\ x, y) \\ = \sum\limits_{a=1}^{\varrho}\Big[\mathfrak{H}(x', y')_a\mathfrak{H}(x, y)_{\varrho+a} - \mathfrak{H}(x, y)_a\mathfrak{H}(x', y')_{\varrho+a}\Big], \end{cases}$$

wenn nämlich die rationalen Functionen $\mathfrak{H}(\xi, \eta)_{\varrho+a}$ durch die Gleichungen

$$(2.)\qquad \mathfrak{H}(\xi, \eta)_{\varrho+a} = -\frac{1}{k_a}\cdot[\mathfrak{H}(\bar{x}_t, \bar{y}_t;\ \xi, \eta)]_{t^{k_a}} \qquad (a=1,\ldots \varrho)$$

definirt werden. (Diese Functionen liefern, wie wir beiläufig bemerken wollen, Integrale zweiter Gattung, die nur an der Stelle (a, b) unendlich werden.)

Die Gleichung (1.) giebt den Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument bei den Integralen dritter Gattung; wir benutzen dieselbe hier, um einen Ausdruck für die Summe

$$\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{H}(x, y_k;\ x', y')$$

herzuleiten, worin $y_1, \ldots, y_n$ die zu einem und demselben Werthe von x gehörigen conjugirten Werthe der algebraischen Function y von x bedeuten.

Man bemerkt zuvörderst, dass, wenn wir mit $y'_1, \ldots, y'_n$ ebenso die conjugirten Werthe von y' bezeichnen,

$$(3.)\qquad \sum_{k=1}^{n}\mathfrak{H}(x, y;\ x', y'_k) = \frac{1}{x'-x} - \frac{1}{x'-a_0}.$$

ist; dies ergiebt sich durch einfache Schlüsse aus der bekannten Gleichung

$$(4.)\qquad \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{H}(x', y'_k)_a = 0 \qquad (a=1,\dots\varrho)$$

in Verbindung mit III., (3.), (2.), (4.). Vermöge der Definition (2.) erhalten wir nun aus (3.) die der Gleichung (4.) entsprechende:

$$(4^a.)\qquad \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{H}(x', y'_k)_{\varrho+a} = -\frac{1}{k_a}\cdot(x'-a)^{-k_a-1} \qquad (a=1,\dots\varrho).$$

Setzen wir die Werthe (3.), (4.), (4ª.) in diejenige Gleichung ein, die aus (1.) hervorgeht, wenn man darin y' der Reihe nach durch $y'_1, \dots, y'_n$ ersetzt und summirt, so ergiebt sich

$$\frac{1}{(x'-x)^2} - \frac{d}{dx'}\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{H}(x', y'_k;\ x, y) = \sum_{a=1}^{\varrho} \frac{1}{k_a}\cdot \mathfrak{H}(x, y)_a.(x'-a)^{-k_a-1}$$

und hieraus durch Integration und Vertauschung von (x, y) und (x', y') die gewünschte Gleichung

$$(5.)\ \sum_{k=1}^{n}\mathfrak{H}(x,y_k;\, x',y') = \frac{1}{x'-x} - \frac{1}{x'-a_0} + \sum_{a=1}^{\varrho}\mathfrak{H}(x',y')_a\cdot\frac{1}{k_a^2}\left\{(x-a)^{-k_a}-(a_0-a)^{-k_a}\right\},$$

welche wir sogleich benutzen werden.

V.

Wir definiren nun, unter (x', y') eine beliebige Stelle des algebraischen Gebildes verstehend, die nur nicht mit (a_0, b_0) oder (a, b) zusammenfallen soll, eine Function $\mathfrak{E}(x, y;\ x', y')$ durch die Gleichung

$$(1.)\qquad \mathfrak{E}(x, y;\ x', y') = e^{\int_{(a,b)}^{(x',y')} \mathfrak{H}(x,y;\ x',y')\,dx'}.$$

Aus

$$\mathfrak{H}(x, y;\ x'_t, y'_t)\frac{dx'_t}{dt} = -\sum_{\mu} \mathfrak{H}(x, y;\ x', y')_\mu t^\mu$$

und den Eigenschaften der Functionen $\mathfrak{H}(x, y;\ x', y')_\mu$ ergeben sich dann folgende Formeln

$$(2.)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}(x'_t, y'_t;\ x', y') = t.\mathfrak{P}(t) & (\mathfrak{P}(0) \neq 0),\\ \mathfrak{E}(\bar{x}_t, \bar{y}_t;\ x', y') = t^{-1}.\mathfrak{P}_1(t).e^{\sum_{\beta=1}^{\varrho} t^{-k_\beta}.w_\beta} & (\mathfrak{P}_1(0) \neq 0),\\ \qquad w_\beta = \int_{(a,b)}^{(x',y')} \mathfrak{H}(x, y)_\beta dx & (\beta=1,\dots\varrho),\\ \mathfrak{E}(x_t, y_t;\ x', y') = \mathfrak{P}_2(t) & (\mathfrak{P}_2(0) \neq 0),\\ \mathfrak{E}(a_0, b_0;\ x', y') = 1. \end{cases}$$

(Die Integrale w_β haben denselben Integrationsweg wie das Integral in (1.)). Die Function $\mathfrak{E}(x, y;\ x', y')$ besitzt also nur *eine* Nullstelle (x', y') und eine Unbestimmtheitsstelle (a, b). Durch ein ähnliches Verfahren, wie es Herr *Weierstrass* auf die Function

$$(3.)\qquad E(x, y;\ x_1, y_1 | x_0, y_0) = e^{\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} H(x, y;\ x', y')\,dx'}$$

(welche *eine* Nullstelle (x_1, y_1), *eine* Unendlichkeitsstelle (x_0, y_0) und ϱ Unbestimmtheitsstellen $(a_1, b_1), \ldots, (a_\varrho, b_\varrho)$ besitzt) anwendet, kann man zeigen, dass $\mathfrak{E}(x, y;\ x', y')$ eine *eindeutige* Function des Paares (x, y) ist; dies geht auch, wenn man die Theorie der Function (3.) voraussetzt, aus der Gleichung

$$\mathfrak{E}(x, y;\ x', y') = E(x, y;\ x', y' | a, b) e^{\sum_{\beta=1}^{\varrho} w_\beta H(x, y;\ a, b)_{k_\beta - 1}}$$

hervor, welche unmittelbar aus III, (1.) folgt.

Für die *Norm* unserer Function, d. h.

$$N(x) = \prod_{k=1}^{n} \mathfrak{E}(x, y_k;\ x', y'),$$

erhalten wir nach IV, (5.) den Ausdruck

$$N(x) = \frac{x-x'}{x-a} \cdot \frac{a_0 - a}{a_0 - x'} \cdot e^{\sum_{a=1}^{\varrho} \frac{w_a}{k_a^2} [(x-a)^{-k_a} - (a_0 - a)^{-k_a}]},$$

diese Norm ist also eine eindeutige Primfunction. Wir werden auch sehen, dass die Function $\mathfrak{E}(x, y;\ x', y')$ eine ähnliche Productdarstellung der eindeutigen Functionen des Paares (x, y) ermöglicht, wie die Primfunctionen im Gebiete der eindeutigen Functionen einer Veränderlichen x.

VI.

Mit Hülfe der Eigenschaften der Functionen $\mathfrak{H}(x, y;\ x', y')$ und $\mathfrak{E}(x, y;\ x', y')$ können wir nun die drei Hauptprobleme, welche Herr *Appell* a. a. O. behandelt, folgendermassen erledigen.

A. Darstellung der eindeutigen Functionen des Paares (x, y), die nur eine endliche Anzahl (wesentlicher oder ausserwesentlicher) singulärer Stellen besitzen.

Es sei $\Phi(x, y)$ eine solche Function, welche an der singulären Stelle (x_i, y_i) die Entwickelung

$$\Phi(\overset{i}{x_t}, \overset{i}{y_t}) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu^{(i)} . t^{-\nu} \qquad (i = 1, \ldots r)$$

besitzt; dann ergiebt sich durch Anwendung der Gleichung (3.) (No. I) auf die eindeutige Function

$$F(x, y) = \Phi(x, y).\{\mathfrak{H}(x', y'; x, y)-\mathfrak{H}(x'', y''; x, y)\}$$

die Gleichung

$$\Phi(x', y')-\Phi(x'', y'') = \sum_{\nu, i} A_\nu^{(i)}\{\mathfrak{H}(x', y'; x_i, y_i)_{\nu-1}-\mathfrak{H}(x'', y''; x_i, y_i)_{\nu-1}\}$$

oder

$$(1.) \qquad \Phi(x, y) = C+\sum_{\nu, i} A_\nu^{(i)}\mathfrak{H}(x, y; x_i, y_i)_{\nu-1},$$

wo C eine Constante bedeutet. Bildet man die ϱ Gleichungen

$$\sum\left[\Phi(x_t, y_t)\mathfrak{H}(x_t, y_t)_a \frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}} = 0 \qquad (a = 1, \dots \varrho),$$

so erkennt man, dass zwischen den $A_\nu^{(i)}$ die ϱ Bedingungsgleichungen

$$\sum_{\nu, i} A_\nu^{(i)}\mathfrak{h}(x_i, y_i)_{a,\nu} = 0 \qquad (a = 1, \dots \varrho)$$

bestehen, welche (nach den Eigenschaften der $\mathfrak{H}(x, y; x_i, y_i)_{\nu-1}$) ausdrücken, dass $\Phi(x, y)$ an der Stelle (a, b) nicht unendlich wird, wenn diese Stelle nicht unter den (x_i, y_i) enthalten ist.

Diese Darstellung entspricht (auch in der Herleitung) durchaus derjenigen, die Herr *Weierstrass* in seinen Vorlesungen für die rationalen Functionen des Paares (x, y) giebt. Sie hat gegenüber der *Appell*schen (a. a. O. S. 121) den Nachtheil, dass die Elemente der Darstellung hier (d. h. die $\mathfrak{H}(x, y; x_i, y_i)_{\nu-1}$) nicht, wie bei Herrn *Appell*, nur an einer, sondern an zwei Stellen des Gebildes unendlich werden; dafür besitzt sie andererseits vor jener den Vorzug, dass die Elemente *rationale* Functionen des Paares (x, y) sind; dies ist namentlich bei Behandlung des folgenden Problems von Vortheil.

*B. Verallgemeinerung des Mittag-Leffler*schen *Theorems.* (*Appell*, a. a. O. S. 126).

Es sei eine Reihe von einander verschiedener Stellen (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... mit der einen Häufungsstelle (a, b) (welche keine singuläre Stelle des Gebildes sein soll) gegeben; ferner eine Reihe rationaler Functionen $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, ..., von denen $f_i(x, y)$ nur an der Stelle (x_i, y_i) unendlich wird; dann kann man eine eindeutige Function des Paares (x, y) mit der einen wesentlichen singulären Stelle (a, b) bilden, welche nur an den Stellen (x_1, y_1), ... unendlich wird, und zwar an (x_i, y_i) in derselben Weise wie $f_i(x, y)$.

Wir heben von den (x_i, y_i) diejenigen heraus, welche in der durch $(\bar{x}_t, \bar{y}_t)$ dargestellten Umgebung der Stelle (a, b) liegen; dies seien diejenigen,

wo $i > m$, so dass es für $i > m$ stets einen eindeutig bestimmten Werth $t = t_i$ giebt, für welchen

$$(\bar{x}_t,\ \bar{y}_t)_{t=t_i} = (x_i,\ y_i)$$

ist. Wir nehmen ferner an, dass die zur Herstellung von $\mathfrak{H}(x, y; x', y')$ benutzte Stelle (a_0, b_0) nicht in dem Element $(\bar{x}_t, \bar{y}_t)$ liegt.

Zufolge (1.) können wir setzen

$$f_i(x, y) = C_i + \sum_\nu c_\nu^{(i)}.\mathfrak{H}(x, y;\ x_i, y_i)_{\nu-1};$$

nach den Eigenschaften der Functionen $\mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta)_{\nu-1}$ giebt es aber eine Entwickelung:

$$(2.)\qquad C + \sum_\nu c_\nu^{(i)}\mathfrak{H}(x, y;\ \bar{x}_t, \bar{y}_t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} R_\mu^{(i)}(x, y).t^\mu,$$

welche convergirt, so lange (x, y), kurz gesagt, weiter von (a, b) entfernt ist als die Stelle $(\bar{x}_t, \bar{y}_t)$, so dass

$$(2^a.)\qquad f_i(x, y) = \sum_\mu R_\mu^{(i)}(x, y).t_i^\mu$$

wird. Hier bedeutet $R_\mu^{(i)}(x, y)$ eine rationale Function des Paares (x, y), die nur an der Stelle (a, b) unendlich wird; die Reihe $(2^a.)$ convergirt, so lange (x, y) ausserhalb der durch $|t_i|$ bestimmten Umgebung von (a, b) liegt, und zwar *gleichmässig*.

Nimmt man nun eine Reihe positiver Grössen ε_i so an, dass $\sum_i \varepsilon_i$ convergirt, bestimmt dann die positiven Zahlen m_i so, dass für die oben bezeichneten Lagen von (x, y)

$$\left| \sum_{\mu=m_i+1}^{\infty} R_\mu^{(i)}(x, y) t_i^\mu \right| < \varepsilon_i,$$

und setzt endlich

$$\text{für}\quad i \leq m \quad F_i(x, y) = f_i(x, y),$$

$$\text{für}\quad i > m \quad F_i(x, y) = f_i(x, y) - \sum_{\mu=0}^{m_i} R_\mu^{(i)}(x, y) t_i^\mu,$$

so stellt die Function

$$(3.)\qquad \Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x, y)$$

eine Function der verlangten Art dar. Die Reihe (3.) convergirt für *jede* Lage von (x, y) (ausser $(x, y) = (a, b)$), da man stets eine Zahl M so bestimmen kann, dass für $i > M$ sowohl $(x_i, y_i) = (\bar{x}_t, \bar{y}_t)_{t=t_i}$ ist als auch (x, y) ausserhalb der Umgebung $|t_i|$ der Stelle (a, b) liegt.

Man kann auch annehmen, dass $f_i(x, y)$ ausser an (x_i, y_i) noch an (a, b) unendlich wird; dann ist

$$f_i(x, y) = C + \sum_\nu c_\nu^{(i)} \mathfrak{H}(x, y;\ x_i, y_i)_{\nu-1} + \sum_\sigma \mathfrak{d}_\sigma^{(i)} \mathfrak{H}(x, y;\ a, b)_{\sigma-1},$$

und man hat in (2.), (2^a.) zu $R_0^{(i)}(x, y)$ noch

$$\sum_\sigma \mathfrak{d}_\sigma^{(i)} \mathfrak{H}(x, y;\ a, b)_{\sigma-1},$$

hinzuzufügen.

C. Zerlegung in Primfactoren. (*Appell*, a. a. O. S. 132).

Ist wiederum eine Reihe von Stellen (x_i, y_i) wie oben gegeben, dazu eine Reihe positiver ganzer Zahlen $n_1, n_2, \ldots$, so kann man eine eindeutige Function des Paares (x, y) mit der einen wesentlichen singulären Stelle (a, b) bilden, welche an jeder Stelle (x_i, y_i) von der Ordnung n_i Null wird.

Aus der Definition von $\mathfrak{E}(x, y;\ x', y')$ ergiebt sich nämlich

$$\frac{d}{dt} \log \mathfrak{E}(x, y;\ \bar{x}_t, \bar{y}_t) = \mathfrak{H}(x, y;\ \bar{x}_t, \bar{y}_t) \frac{d\bar{x}_t}{dt}$$

$$= -\sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{H}(x, y;\ a, b)_\mu t^\mu,$$

und hieraus folgt, wenn wieder $(x_i, y_i) = (\bar{x}_t, \bar{y}_t)_{t=t_i}$ $(i > m)$, eine Entwickelung

$$\log f(x, y;\ x_i, y_i)^{n_i} = \sum_{\mu=1}^{\infty} R_\mu^{(i)}(x, y) t_i^\mu,$$

worin die $R_\mu^{(i)}$ analoge Bedeutung haben wie in (2.), (2^a.), und von deren Convergenz dasselbe gilt wie von derjenigen der Reihe (2^a.). Bestimmen wir dann die Zahlen m_i in entsprechender Weise und setzen

$$\text{für } i \leqq m \qquad R_i(x, y) = 0,$$

$$\text{für } i > m \qquad R_i(x, y) = \sum_{\mu=1}^{m_i} R_\mu^{(i)}(x, y) t_i^\mu,$$

so wird

$$(4.) \qquad \Phi(x, y) = \prod_{i=1}^{\infty} f(x, y;\ x_i, y_i)^{n_i} . e^{R_i(x, y)}$$

eine Function der verlangten Art darstellen. (Die Existenz einer solchen Zerlegung der eindeutigen Functionen von (x, y) in Primfactoren ist von Herrn *Weierstrass* wiederholt in Vorlesungen ausgesprochen worden).

D. Man kann auch leicht eine Function $\Phi(x, y)$ mit nur einer singulären Stelle (a, b) bilden, welche an einer Reihe gegebener Stellen (x_i, y_i) (die sich an (a, b) häufen) vorgeschriebene Werthe A annimmt.

Zu diesem Behufe bilde man nach *C.* eine Function $F(x, y)$, welche diese Stellen zu einfachen Nullstellen besitzt, und setze

$$F'(x_i, y_i) = [F(\overset{i}{x_t}, \overset{i}{y_t})]_t;$$

sodann bilde man nach *B.* eine Function $G(x, y)$ mit der einen wesentlichen singulären Stelle (a, b) und den ausserwesentlichen singulären Stellen (x_i, y_i) $(i = 1, \ldots)$, wo sie unendlich wird wie

$$f_i(x, y) = -\frac{A_i}{F'(x_i, y_i)} \cdot \mathfrak{H}(x, y;\ x_i, y_i)_1;$$

es ist dann in der Umgebung von (x_i, y_i)

$$F(\overset{i}{x_t}, \overset{i}{y_t}) = F'(x_i, y_i).t + t^2.\mathfrak{P}_i(t),$$

$$G(\overset{i}{x_t}, \overset{i}{y_t}) = \frac{A_i}{F'(x_i, y_i)} \cdot t^{-1} + \overline{\mathfrak{P}}_i(t),$$

woraus hervorgeht, dass

$$\Phi(x, y) = F(x, y).G(x, y)$$

eine Function der verlangten Art darstellt.

Dieser Lösung entspricht, wie man sieht, in der Theorie der rationalen Functionen einer Veränderlichen die *Lagrange*sche Interpolationsformel.

Das Additionstheorem der elliptischen Functionen.

(Von *Paul Günther*.)

I.

Nach *Abel* („Précis d'une théorie des fonctions elliptiques", Oeuvres, 2. Ausgabe, Bd. I, S. 532 ff.) kann man den Ausdruck für das allgemeine Additionstheorem der elliptischen Functionen auf folgende Weise erhalten.

In dem Ausdruck

$$(1.)\quad \begin{cases} F(u) = \operatorname{sn} u\left\{a_0 + a_1 \operatorname{sn}^2 u + a_2 \operatorname{sn}^4 u + \cdots + a_{\left[\frac{m}{2}\right]} \operatorname{sn}^{2\cdot\left[\frac{m}{2}\right]} u\right\} \\ \qquad + \operatorname{sn}' u\left\{b_0 + b_1 \operatorname{sn}^2 u + b_2 \operatorname{sn}^4 u + \cdots + b_{\left[\frac{m-1}{2}\right]} . \operatorname{sn}^{2\cdot\left[\frac{m-1}{2}\right]} u\right\} \end{cases}$$

(wo $\operatorname{sn}' u = \frac{d \operatorname{sn} u}{du}$, $[p]$ die grösste in p enthaltene ganze Zahl ist) können die Constanten a_h, b_h so bestimmt werden, dass $F(u)$ an m beliebigen Stellen $u_1, \ldots, u_m$ verschwindet; hierdurch sind die a_h, b_h bis auf einen allen gemeinsamen willkürlichen Factor bestimmt als ganze rationale Functionen der $\operatorname{sn} u_\alpha$, $\operatorname{sn}' u_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ in Determinantenform. Dann hat $F(u)$ noch eine $(m+1)^{\text{te}}$ Nullstelle

$$u_{m+1} \equiv -\sum_{\alpha=1}^{m} u_\alpha - m.K'i \qquad (\text{modd. } 2K, 2K'i);$$

nämlich $F(u)$ ist nach der Bezeichnung von Herrn *Hermite* eine doppeltperiodische Function zweiter Art mit den Perioden $2K$, $2K'i$ und den Multiplicatoren -1, $+1$; also ist die Differenz zwischen der Summe ihrer Unendlichkeits- und der ihrer Nullstellen

$$\equiv \frac{1}{\pi i}[K'i.\log(-1) - K.\log(+1)] \qquad (\text{modd. } 2K, 2K'i)$$

$$\equiv K'i,$$

erstere Summe ist aber $= (m+1)K'i$.

Setzt man nun

$$\operatorname{sn} u = x, \quad \operatorname{sn} u_a = x_a \qquad (a = 1, 2, \ldots, m+1),$$

so wird

$$(2.) \qquad F(u).F(-u) = A_0 + A_1 x^2 + \cdots + A_{m+1} x^{2(m+1)},$$

wo die A_h in leicht zu übersehender Weise aus den a_h, b_h zusammengesetzt sind, und daher

$$(3.) \qquad x_1^2.x_2^2 \ldots x_m^2.x_{m+1}^2 = (-1)^{m+1}.\frac{A_0}{A_{m+1}}.$$

Da $A_0 = b_0^2$, $A_{m+1} = K^2.b^2_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}$ oder $= -a^2_{\left[\frac{m}{2}\right]}$, je nachdem m ungerade oder gerade ist, so wird durch (3.) x_{m+1} und daher $\operatorname{sn}(u_1 + \cdots + u_m)$ als rationale Function der $\operatorname{sn} u_a$, $\operatorname{sn}' u_a$ ($\alpha = 1, \ldots, m$) dargestellt.

Dieses Verfahren ist nicht direct bequem anwendbar, wenn mehrere der u_a einander gleich werden, weil dann zur Bestimmung der a_h, b_h in (1.) die Ableitungen von $F(u)$ zu bilden sind. Aber man kann sehr leicht zum gewünschten Ziel gelangen, wenn man $F(u)$ in der Form

$$(4.) \qquad F(u) = F_0.\operatorname{sn} u + F_1.\operatorname{sn}' u + F_2.\operatorname{sn}^{(2)} u + \cdots + F_m.\operatorname{sn}^{(m)} u$$

darstellt, wo $\operatorname{sn}^{(h)} u = \frac{d^h \operatorname{sn} u}{du^h}$ ist und $F_0, \ldots, F_m$ Constanten bedeuten. In der That ist ja $F(u)$ eine elliptische Function (mit den Perioden $4K$, $2K'i$), die an der Stelle $u = K'i$ eine Entwickelung von der Form

$$\sum_{h=1}^{m+1} f_h.(u-K'i)^{-h} + \mathfrak{P}(u-K'i),$$

an der Stelle $u = 2K + K'i$ dagegen die Entwickelung

$$-\sum_{h=1}^{m+1} f_h(u-2K-K'i)^{-h} + \overline{\mathfrak{P}}(u-2K-K'i)$$

besitzt und sonst nirgènds im Periodenparallelogramm unendlich wird; daher können $F_0, \ldots, F_m$ so bestimmt werden, dass der Ausdruck in (4.) rechts sich von $F(u)$ nur um eine Constante unterscheidet, und diese muss $= 0$ sein, weil beide Ausdrücke, wenn u um $2K$ vermehrt wird, sich mit -1 multipliciren. (Um den Ausdruck (4.) zu ermöglichen, ist der Function $F(u)$ gerade die besondere Form (1.) gegeben worden. An und für sich würde es ausreichen,

$$F(u) = G_0(\operatorname{sn} u) + \operatorname{sn}' u.G_1(\operatorname{sn} u)$$

zu nehmen, wo die beiden ganzen rationalen Functionen G_0, G_1 aber der Bedingung zu genügen haben, dass eine von ihnen eine gerade, die andere eine ungerade Function von $\operatorname{sn} u$ ist.) —

Sind nun λ_1 von den Grössen $u_1, \ldots, u_m$ etwa $= v_1$, λ_2 derselben etwa $= v_2, \ldots, \lambda_s$ etwa $= v_s$ $\left(\sum_{h=1}^{s} \lambda_h = m\right)$, so sind $F_0, \ldots, F_m$ bis auf einen willkürlichen Factor als ganze rationale Functionen der Grössen $\operatorname{sn} v_h$, $\operatorname{sn}' v_h$ $(h = 1, \ldots, s)$ bestimmt vermöge der Gleichungen

$$(5.)\qquad \frac{d^l F(v_h)}{dv_h^l} = 0 \qquad \binom{l=0,\ldots,\lambda_h-1}{h=1,\ldots,s}.$$

Bildet man andererseits mit (4.) die Function $F(u).F(-u)$ und vergleicht dies mit (2.), so ergiebt sich durch Vergleichung der Glieder mit $(u-K'i)^{-2m-2}$ in den entsprechenden Entwickelungen:

$$A_{m+1} = (-1)^{m+1}.[m!]^2.K^{2m}.F_m^2;$$

ferner ist

$$A = F(0)^2,$$

also nach (3.)

$$x_1^2.x_2^2\ldots x_m^2.x_{m+1}^2 = \frac{1}{[m!]^2.K^{2m}}\cdot\frac{F(0)^2}{F_m^2}$$

und durch Radicirung

$$(6.)\qquad \operatorname{sn}(u_1+\cdots+u_m+m.K'i) = \frac{(-1)^m}{m!K^m}\cdot\frac{F(0)}{F_m}\cdot\frac{1}{\prod_{a=1}^{m}\operatorname{sn} u_a}.$$

Die Richtigkeit des Vorzeichens ergiebt sich dadurch, dass man (die Vorzeichenbestimmung für $\operatorname{sn}(u_1+\cdots+u_{m-1}+(m-1)K'i)$ vorausgesetzt) in (6.) $u_m = -K'i$ setzt, zu welchem Zwecke man rechts Zähler und Nenner nach Potenzen von $u_m - K'i$ entwickeln wird.

Man kann (6.) auch verificiren durch Vergleich mit den von *Abel* gegebenen Ausdrücken, indem man zunächst $u_1, \ldots, u_m$ sämmtlich von einander verschieden voraussetzt. Beachtet man nämlich, dass $\operatorname{sn}^{(2h)}u$ eine ganze rationale Function $(2h+1)^{\text{ten}}$ Grades von $\operatorname{sn} u$ ist, worin $\operatorname{sn}^{2h+1}u$ den Coefficienten $(2h)!K^{2h}$ hat, ferner $\frac{\operatorname{sn}^{(2h+1)}u}{\operatorname{sn}'u}$ eine ganze Function $(2h)^{\text{ten}}$ Grades von $\operatorname{sn} u$ mit $(2h+1)!K^{2h}$ als höchstem Coefficienten, so erkennt man, dass in diesem Falle $F(0)$ bis auf einen nur von K und numerischen Grössen abhängenden (sehr leicht zu bestimmenden) Factor mit der Determinante

$$\left|\operatorname{sn} u_a,\ \operatorname{sn}^3 u_a,\ \ldots,\ \operatorname{sn}^{2\left[\frac{m}{2}\right]+1} u_a;\ \operatorname{sn}^2 u_a.\operatorname{sn}' u_a,\ \operatorname{sn}^4 u_a.\operatorname{sn}' u_a,\ \ldots,\ \operatorname{sn}^{2\left[\frac{m-1}{2}\right]} u_a.\operatorname{sn}' u_a\right|_{(a=1,\ldots,m)}$$

übereinstimmt, ebenso F_m bis auf einen ähnlichen Factor mit

$$\left|\operatorname{sn} u_a,\ \operatorname{sn}^3 u_a,\ \ldots,\ \operatorname{sn}^{2\left[\frac{m-1}{2}\right]+1} u_a,\ \operatorname{sn}' u_a,\ \operatorname{sn}^2 u_a . \operatorname{sn}' u_a,\ \ldots,\ \operatorname{sn}^{2\left[\frac{m-2}{2}\right]} u_a . \operatorname{sn}' u_a\right| . \quad {\scriptstyle (a=1,\ldots m)}$$

Durch Vergleich mit den *Abel*schen Ausdrücken ergiebt sich dann unmittelbar die Gleichung (6.). Aus den hierbei auftretenden Ausdrücken von $F(0)$, F_m für den Fall ungleicher u_a ergeben sich aber leicht die entsprechenden für den allgemeinen Fall, indem man die Grössen $\operatorname{sn}^{(h)} u_k (k = 2, \ldots, \lambda_1)$ nach Potenzen von $u_k - u_1$, ferner $\operatorname{sn}^{(k)} u_{\lambda_1+k} (k = 2, \ldots, \lambda_2 - \lambda_1)$ nach Potenzen von $u_{\lambda_1+k} - u_{\lambda_1+1}$, u. s. f., entwickelt und

$$\lim \frac{F(0)}{(u_2-u_1)(u_3-u_1)^2 \ldots (u_{\lambda_1}-u_1)^{\lambda_1-1}(u_{\lambda_1+2}-u_{\lambda_1+1})(u_{\lambda_1+3}-u_{\lambda_1+1})^2 \ldots (u_{\lambda_1+\lambda_2}-u_{\lambda_1+1})^{\lambda_2-1}\ldots},$$

$$\lim \frac{F_m}{(u_2-u_1)(u_3-u_1)^2 \ldots (u_{\lambda_1}-u_1)^{\lambda_1-1}(u_{\lambda_1+2}-u_{\lambda_1+1})(u_{\lambda_1+3}-u_{\lambda_1+1})^2 \ldots (u_{\lambda_1+\lambda_2}-u_{\lambda_1+1})^{\lambda_2-1}\ldots}$$

$$\left(\text{für}\ \begin{array}{l} u_1 = u_2 = u_3 = \cdots = u_{\lambda_1} = v_1 \\ u_{\lambda_1+1} = u_{\lambda_1+2} = u_{\lambda_1+3} \cdots = u_{\lambda_1+\lambda_2} = v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right)$$

bildet. Diese Betrachtung liefert daher zugleich einen anderen Beweis der Gleichung (6.) für alle möglichen Fälle.

Eine von der obigen nur formell verschiedene Herleitung des Additionstheorems erhält man durch Betrachtung der Determinante

$$(7.)\qquad \Phi_m(u_0, u_1, \ldots, u_m) = |\operatorname{sn}^{(h)} u_k|, \qquad {\scriptstyle (h, k = 0, 1, \ldots, m)}$$

wo $u_0, u_1, \ldots, u_m$ Unbestimmte bedeuten sollen. Als Function von u_0 ist dieselbe eine doppeltperiodische Function zweiter Art mit den Perioden $2K$, $2K'i$ und den Multiplicatoren -1, $+1$; sie wird für $u_0 = K'i$ unendlich von der Ordnung $m+1$, dagegen Null an den Stellen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ und daher (vgl. oben) auch noch an der Stelle $-\sum_{a=1}^{m} u_a - mK'i$. Hiernach ist

$$(8.)\quad \Phi_m(u_0, u_1, \ldots, u_m) = f(u_1, \ldots, u_m) \cdot \frac{\prod_{a=1}^{m} H(u_0-u_a) . H(u_0+u_1+\cdots+u_m+mK'i) e^{\frac{m\pi i}{2K} . u_0}}{\Theta(u_0)^{m+1}},$$

wo $f(u_1, \ldots, u_m)$ nicht mehr von u_0 abhängt. Um f zu bestimmen, entwickeln wir in (8.) auf beiden Seiten nach Potenzen von $(u_0 - K'i)$ und vergleichen die Coefficienten von $(u_0 - K'i)^{-m-1}$; dies giebt

$$\frac{m!}{K} \cdot \Phi_{m-1}(u_1, \ldots, u_m) = \frac{f(u_1, \ldots, u_m) . \prod_{a=1}^{m} H(-u_a+K'i) H(u_1+\cdots+[m+1]K'i)}{\left(i . e^{\frac{\pi K'}{4K}}\right)^{m+1} . H'(0)^{m+1}} e^{-\frac{m\pi K'}{2K}}$$

$$= \frac{f(u_1, \ldots, u_m) . \prod_{a=1}^{m} \Theta(u_a) . \Theta(u_1+\cdots+u_m+mK'i)}{H'(0)^{m+1}},$$

sodass (8.) übergeht in

$$(9.)\quad \begin{cases} \Phi_m(u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_m) \\ = \dfrac{m!}{K}\cdot H'(0)^{m+1}\cdot \prod_{a=1}^{m} \dfrac{H(u_0-u_a)}{\Theta(u_a)}\cdot \dfrac{H(u_0+u_1+\cdots+u_m+mK'i)}{\Theta(u_1+\cdots+u_m+mK'i)}\cdot \Phi_{m-1}(u_1,\ldots,u_m). \end{cases}$$

Hieraus lässt sich einerseits der allgemeine Ausdruck von $\Phi_m(u_0, u_1, \ldots, u_m)$ in den Θ, H ableiten, worauf wir aber hier nicht eingehen; andererseits folgt daraus für $u_0 = 0$

$$(10.)\quad \operatorname{sn}(u_1+\cdots+u_m+mK'i) = \frac{(-1)^m}{m!K^m}\cdot\frac{\Phi_m(0,\ u_1,\ \ldots,\ u_m)}{\Phi_{m-1}(u_1,\ \ldots,\ u_m)}\cdot\frac{1}{\prod_{a=1}^{m}\operatorname{sn}u_a},$$

und dies ist genau die Formel (6.) für den Fall ungleicher u_a. Der allgemeine Ausdruck kann aus (10.) durch den oben angedeuteten Grenzübergang erhalten werden.

II.

Das Additionstheorem für die Function $\wp u$ kann ebenfalls nach verschiedenen Methoden hergeleitet werden.

Es sei

$$(11.)\quad F(u) = F_0+F_1.\wp u+F_2.\wp' u+\cdots+F_m.\wp^{(m-1)}u$$

eine elliptische Function $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades, die nur für $u = 0$ unendlich wird (jede Function dieser Art kann bekanntlich auf die Form (11.) gebracht werden). Die Constanten $F_0, \ldots, F_m$ werden bis auf einen willkürlichen gemeinsamen Factor dadurch bestimmt, dass $F(u)$ an m vorgeschriebenen Stellen $u_1, \ldots, u_m$ verschwinden soll; sind λ_1 von den u_1 gleich v_1, u. s. f. (wie oben), so liefern die Gleichungen

$$(12.)\quad \frac{d^k F(v_h)}{dv_h^k} = 0 \qquad \binom{k=0,\ldots,\lambda_h-1}{h=1,\ldots,s}$$

$F_0, \ldots, F_m$ als ganze rationale Functionen der $\wp u_a$, $\wp' u_a$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$. Die $(m+1)^{\text{te}}$ Nullstelle von $F(u)$ ist

$$u_{m+1} \equiv -\sum_{a=1}^{m} u\ ;$$

daher wird

$$(13.)\quad \begin{cases} F(u).F(-u) = A_0+A_1.\wp u+A_2.\wp^2 u+\cdots+A_{m+1}.\wp^{m+1}u \\ \qquad = A_{m+1}[\wp u-\wp(u_1+\cdots+u_m)].\prod_{a=1}^{m}(\wp u-\wp u_a), \end{cases}$$

also

$$(14.)\qquad \wp(u_1+\cdots+u_m)-\wp u = -\frac{F(u).F(-u)}{A_{m+1}.\prod\limits_{a=1}^{m}(\wp u-\wp u_a)}.$$

Entwickelt man in (13.) auf beiden Seiten nach Potenzen von u und vergleicht die Coefficienten von u^{-2m-2}, so folgt

$$A_{m+1} = (-1)^{m-1}.F_m^2.[m!]^2,$$

also

$$(15.)\qquad \wp(u_1+\cdots+u_m) = \wp u+\frac{F(u).F(-u)}{[m!]^2.F_m^2.\prod\limits_{a=1}^{m}(\wp u_a-\wp u)}.$$

Hier ist das Additionstheorem dargestellt mit Hülfe eines willkürlichen Parameters u. Setzt man für u z. B. einen der beiden Werthe, für welchen $\wp u = 0$ ist, so erhält man eine Form des Additionstheorems, welche in gewisser Weise der in (6.) entspricht. Andererseits kann man u auch noch beseitigen, indem man in (15.) nach Potenzen von u entwickelt und die constanten Glieder auf beiden Seiten einander gleich setzt. So ergiebt sich

$$(16.)\qquad \wp(u_1+\cdots+u_m) = \left[\frac{F_{m-1}}{m.F_m}\right]^2-\frac{2.F_{m-2}}{m(m-1)F_m}-\sum_{a=1}^{m}\wp u_a.$$

Diese Gleichung kann auch direct aus (13.) abgeleitet werden; es ist nämlich

$$\wp(u_1+\cdots+u_m)+\sum_{a=1}^{m}\wp u_a = -\frac{A_m}{A_{m+1}},$$

und A_m ist der Coefficient von u^{-2m} in der Entwicklung von $F(u).F(-u)$, d. h.

$$A_m = (-1)^m.F_{m-1}^2.[(m-1)!]^2+(-1)^{m-1}.2F_m.F_{m-2}.m!(m-2)!,$$

sodass man auf (16.) zurückkommt. Aber dies gilt nur für $m>2$, da alles auf dem Ansatze

$$F(-u) = F_0+\cdots+(-1)^{m-3}.F_{m-2}\wp^{(m-3)}u+(-1)^{m-2}.F_{m-1}\wp^{(m-2)}u \\ +(-1)^{m-1}.F_m.\wp^{(m-1)}u$$

beruht. Für $m=2$ wird analog

$$\wp(u_1+u_2) = \left(\frac{F_{m-1}}{m.F_m}\right)^2-\wp u_1-\wp u_2,$$

also entweder

$$\wp(u_1+u_2) = \tfrac{1}{4}.\left(\frac{\wp'u_1-\wp'u_2}{\wp u_1-\wp u_2}\right)^2-\wp u_1-\wp u_2$$

oder

$$\wp(2u) = \tfrac{1}{4}.\left(\frac{\wp^{(2)}u}{\wp'u}\right)^2-2\wp u.$$

Im Falle ungleicher u_a ist (von dem gemeinsamen Factor aller F_h abgesehen)

$$(17.)\quad \begin{cases} F_m = |1,\ \wp u_a,\ \wp' u_a,\ \ldots,\ \wp^{(m-2)} u_a| & (a=1,\ldots,m) \\ = (-1)^{m-1} 1!2!\ldots(m-1)!\, \dfrac{\prod\limits_{a,\beta} \sigma(u_a-u_\beta).\sigma(u_1+\cdots+u_m)}{\prod\limits_a \sigma u_a^m}, \\ (a>\beta;\ a,\beta=1,2,\ldots,m) \end{cases}$$

(*Hermite*, dieses Journ. Bd. 82; vergl. auch *Schwarz*, Formelsammlung, S. 17.); ferner

$$F_{m-1} = -|1,\ \wp u_a,\ \wp' u_a,\ \ldots,\ \wp^{(m-3)} u_a,\ \wp^{(m-1)} u_a| \qquad (a=1,\ldots,m)$$

$$= -\sum_{a=1}^{m} \frac{\partial F_m}{\partial u_a},$$

$$F_{m-2} = |1,\ \wp u_a,\ \wp' u_a,\ \ldots,\ \wp^{(m-4)} u_a,\ \wp^{(m-2)} u_a,\ \wp^{(m-1)} u_a| \qquad (a=1,\ldots,m).$$

Hiernach gilt die Gleichung

$$-\frac{F_{m-1}}{F_m} = \sum_{a=1}^{m} \frac{\partial \log F_m}{\partial u_a} = m\left\{\frac{\sigma'(u_1+\cdots+u_m)}{\sigma(u_1+\cdots+u_m)} - \sum_{a=1}^{m} \frac{\sigma' u_a}{\sigma u_a}\right\},$$

woraus durch nochmaliges Differentiiren folgt

$$(18.)\quad -\frac{1}{m}\cdot\sum_{a=1}^{m} \frac{\partial}{\partial u_a}\left(\frac{F_{m-1}}{F_m}\right) = -m.\wp(u_1+\cdots+u_m) + \sum_{a=1}^{m} \wp u_a.$$

Da

$$-\sum_{a=1}^{m} \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u_a} = |1,\ \wp u_a,\ \ldots,\ \wp^{(m-4)} u_a,\ \wp^{(m-2)} u_a,\ \wp^{(m-1)} u_a|$$

$$+|1,\ \wp u_a,\ \ldots,\ \wp^{(m-3)} u_a,\ \wp^{(m)} u_a| \qquad (a=1,\ldots,m)$$

$$= F_{m-2} + F'$$

ist, so ergiebt sich aus (18.) die neue Form des Additionstheorems

$$(19.)\quad \wp(u_1+\cdots+u_m) = \frac{1}{m}\cdot\sum_{a=1}^{m} \wp u_a + \frac{1}{m^2}\cdot\frac{F_{m-2}+F'}{F_m} + \frac{1}{m^2}\cdot\left(\frac{F_{m-1}}{F_m}\right)^2$$

(und zugleich durch Combination mit (16.) die Identität

$$(m+1).F_m.\sum_{a=1}^{m} \wp u_a + \frac{3m-1}{m(m-1)} F_{m-2} + \frac{1}{m}\cdot F' = 0.)$$

Wie man aus (19.) das Additionstheorem für den Fall ungleicher u_a herzuleiten hat, ergiebt sich aus den in No. I gemachten Bemerkungen.

Es sei hier noch darauf aufmerksam gemacht, dass für den Fall der Multiplication ($u_1 = \cdots = u_m = u$)

$$(20.)\quad \begin{cases} F_m = |\wp^{(a+\beta-1)} u| & (a,\beta=1,\ldots,m-1) \\ \quad = (-1)^{m-1}.[1!2!\ldots(m-1)!]^2 \psi_m(u) \end{cases}$$

ist, wo $\psi_m(u)$ nach Herrn *Kiepert* (dieses Journ. Bd. 76) die Function

$$\frac{\sigma(m.u)}{(\sigma u)^{m^2}}$$

bedeutet (die Gleichung (20.) ergiebt sich sofort aus (17.) durch einen Grenzübergang in der oben angegebenen Weise).

Endlich wollen wir noch das Additionstheorem für $\wp u$ nach einer Methode herleiten, welche der auf S. 216 ff. benutzten analog ist.

Wird

$$\psi_m(u_0, u_1, \ldots, u_m) = |1, \wp u_a, \wp' u_a, \ldots, \wp^{(m-1)} u_a| \qquad (a=0,\ldots,m)$$

gesetzt, so folgt (vergl. Gleichung (9.), (17.) und *Schwarz*, a. a. O. S. 16)

$$(21.) \left\{ \begin{aligned} &\psi_m(u_0, u_1, \ldots, u_m) \\ &= (-1)^{m+1}.m! \frac{\sigma(u_0+u_1+\cdots+u_m).\prod_{a=1}^{m}\sigma(u_0-u_a)}{\sigma^{m+1}u_0.\sigma(u_1+\cdots+u_m).\prod_{a=1}^{m}\sigma u_a}.\psi_{m-1}(u_1, \ldots, u_m). \end{aligned} \right.$$

Daher kann die Gleichung

$$(22.) \quad \wp(u_1+\cdots+u_m)-\wp u_0 = -\frac{\sigma(u_1+\cdots+u_m+u_0)\sigma(u_1+\cdots+u_m-u_0)}{\sigma^2(u_1+\cdots+u_m)\sigma^2 u_0}$$

umgesetzt werden in

$$\wp(u_1+\cdots+u_m)-\wp u_0 = \frac{1}{[m!]^2}.\frac{\psi_m(u_0, u_1, \ldots, u_m).\psi_m(-u_0, u_1, \ldots, u_m).\sigma^{2m}u_0.\prod_{a=1}^{m}\sigma^2 u_a}{\psi_{m-1}^2(u_1, \ldots, u_m).\prod_{a=1}^{m}[\sigma(u_0+u_a)\sigma(u_0-u_a)]}$$

$$= \frac{1}{[m!]^2}.\frac{\psi_m(u_0, u_1, \ldots, u_m)\psi_m(-u_0, u_1, \ldots, u_m)}{\psi_{m-1}^2(u_1, \ldots, u_m).\prod_{a=1}^{m}(\wp u_a-\wp u_0)},$$

und dies ist nichts anderes als die Gleichung (15.) für den Fall ungleicher u_a. (Der Zusammenhang dieser Methode mit der zuerst dargelegten ist hier noch deutlicher als bei der Function sn$u$).

Mit Hülfe des eben angegebenen Verfahrens kann man auch das Additionstheorem in eine solche Form setzen, dass es für den Fall der Multiplication in die von Herrn *Kiepert* benutzte Gleichung

$$\wp(mu)-\wp u = -\frac{\psi_{m-1}(u)\psi_{m+1}(u)}{\psi_m^2(u)}$$

übergeht. Dividirt man nämlich beide Seiten von (21.) durch (u_0-u_1) und

setzt dann $u_0 = u_1$, so wird, wenn

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_0}\psi_m(u_0, u_1, \ldots, u_m)\right]_{u_0=u_1} = \bar{\psi}_m(u_1, u_1, \ldots, u_m)$$

gesetzt wird,

$$(23.)\quad \left\{\begin{aligned} &\bar{\psi}_m(u_1, u_1, \ldots, u_m) \\ &= (-1)^{m+1}.m!\frac{\sigma(2u_1+u_2+\cdots+u_m).\prod_{\beta=2}^{m}\sigma(u_1-u_\beta)}{\sigma^{m+2}u_1.\sigma(u_1+\cdots+u_m).\prod_{\beta=2}^{m}\sigma u_\beta}\cdot\psi_{m-1}(u_1, \ldots, u_m);\end{aligned}\right.$$

ferner ist

$$(24.)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi_{m-1}(u_1, \ldots, u_m) \\ &= (-1)^m.(m-1)!\frac{\sigma(u_1+\cdots+u_m).\prod_{\beta=2}^{m}\sigma(u_1-u_\beta)}{\sigma^m u_1.\sigma(u_2+\cdots+u_m)\prod_{\beta=2}^{m}\sigma u_\beta}\cdot\psi_{m-2}(u_2, \ldots, u_m).\end{aligned}\right.$$

Dividirt man also (23.) durch (24.) und berücksichtigt die Gleichung

$$\wp(u_1+\cdots+u_m)-\wp u_1 = -\frac{\sigma(2u_1+u_2+\cdots+u_m).\sigma(u_2+\cdots+u_m)}{\sigma^2(u_1+\cdots+u_m).\sigma^2 u_1},$$

so wird

$$(25.)\quad \wp(u_1+\cdots+u_m)-\wp u_1 = \frac{1}{m}\cdot\frac{\bar{\psi}_m(u_1, u_1, \ldots, u_m).\psi_{m-2}(u_2, \ldots, u_m)}{\psi_{m-1}^2(u_1, \ldots, u_m)},$$

und dies ist diejenige Form, welche für den Fall der Multiplication (nach Ausführung des bekannten Grenzüberganges) in die obige *Kiepert*sche Gleichung übergeht.

Im Vorstehenden sind die Ausdrücke des Additionstheorems für alle möglichen Fälle abgeleitet, aber nicht ein Ausdruck, der für alle Fälle unmittelbar gültig bliebe (wie ein solcher z. B. für $m = 2$ durch

$$\operatorname{sn}(u_1+u_2) = \frac{\operatorname{sn}u_1.\operatorname{sn}'u_2+\operatorname{sn}u_2.\operatorname{sn}'u_1}{1-k^2.\operatorname{sn}^2u_1.\operatorname{sn}^2u_2}$$

geliefert wird). Indessen hat es den Anschein, als ob ein solcher Ausdruck nicht diejenige Einfachheit besitzen würde, welche die obigen Formeln auszeichnet; wenigstens lassen die von Herrn *Cayley* (dieses Journ. Bd. 41) angestellten Rechnungen (für $m = 3, 4$) dies vermuthen.

Bemerkung über die Integrale linearer Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Lothar Heffter* in Giessen.)

In einem Aufsatz „Ueber Recursionsformeln der Integrale linearer homogener Differentialgleichungen“ (dieses Journal Bd. 106 S. 296) habe ich eine für jede nach Potenzen von $x-a_i$ fortschreitende, einer Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse genügende Reihe gültige Recursionsformel aufgestellt (Formel (6.) S. 271). Wenn man dort die Grössen F (wobei zur Abkürzung noch $m-n_i = m_i$ gesetzt werde) unter Einführung von $n(m_i+1)$ Grössen

$$\alpha_{\lambda\mu} \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 0, 1, \dots, m_i \\ \mu = 1, 2, \dots, n\end{pmatrix}$$

als Functionen von s in Linearfactoren zerlegt, so kann jene Formel folgendermassen geschrieben werden:

$$(1.)\quad \begin{cases} c_{s-m_i}.p_0.(s+\alpha_{01}-m_i)(s+\alpha_{02}-m_i)\dots(s+\alpha_{0n}-m_i) \\ +c_{s-m_i+1}.p_1.(s+\alpha_{11}-m_i+1)(s+\alpha_{12}-m_i+1)\dots(s+\alpha_{1n}-m_i+1) \\ +\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ +c_s.p_{m_i}.(s+\alpha_{m_i1})(s+\alpha_{m_i2})\dots(s+\alpha_{m_in}) = 0, \end{cases}$$

wobei die Bedeutung der Constanten $\alpha_{\lambda\mu}$ und p_k sich durch Vergleichung mit der dortigen Form ergiebt. Demgemäss sind

$$-\alpha_{m_i1},\quad -\alpha_{m_i2},\quad \dots,\quad -\alpha_{m_in}$$

die Wurzeln der zu $x = a_i$, und

$$\alpha_{01},\quad \alpha_{02},\quad \dots,\quad \alpha_{0n}$$

die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Gleichung.

Setzt man nun für s einen Werth $-\alpha_{m_ik}$, dem wenigstens ein von Logarithmen freies Integral entspricht, und den ersten willkürlich bleibenden Coefficienten $= 1$, so erhält man durch die Formel (1.) eine Reihe,

deren Coefficienten in bekannter Weise independent durch die F, also durch die $\alpha_{\lambda\mu}$ und p als Determinanten dargestellt werden können, und die durch folgendes Symbol bezeichnet werden möge:

$$(2.)\quad y_{ik} = (x-a_i)^{-\alpha_{m_i k}}.\Phi\left(p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_{m_i};\ \begin{array}{c} \alpha_{01}-\alpha_{m_i k},\ \ldots,\ \alpha_{0n}-\alpha_{m_i k} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{m_i 1}-\alpha_{m_i k},\ \ldots,\ \alpha_{m_i n}-\alpha_{m_i k} \end{array};\ x-a_i\right).$$

Es werden also alle Integrale, die sich in eine Reihe nach steigenden Potenzen von $x-a_i$ entwickeln lassen, durch *denselben* Algorithmus Φ gegeben, bei dem nur die Parameter α geändert werden. Ist eine der Wurzeln $-\alpha_{m_i k} = 0$, und setzt man eine andere in die Form $1-\gamma$, so erkennt man in der Art, wie jene Parameter sich von Integral zu Integral ändern, die genaue Verallgemeinerung der bekannten Eigenschaft der *Gauss*schen Reihe, dass aus dem Integral

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)$$

der zugehörigen Differentialgleichung (im Allgemeinen) ein zweites linear unabhängiges in der Gestalt

$$x^{1-\gamma}.F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)$$

hervorgeht. Für diese Vergleichung werde noch hinzugefügt, dass in der *Gauss*schen Reihe ausser x eigentlich vier Elemente auftreten, nämlich α, β und 1, γ, von denen die ersten beiden unter einander und die letzten beiden unter einander vertauschbar sind, und von denen 1 in dem Symbol F bloss nicht zum Ausdruck kommt.

Derselbe Algorithmus Φ giebt aber auch die in der Umgebung von $x=\infty$ als Reihe darstellbaren Integrale. Ersetzt man nämlich in (1.) allenthalben s durch $-s+m_i$, multiplicirt die Gleichung mit $(-1)^n$ und schreibt die Summanden in umgekehrter Reihenfolge, so hat man

$$(3.)\quad \begin{cases} \quad c_{-s+m_i}.p_{m_i}.(s-\alpha_{m_i 1}-m_i)\ldots(s-\alpha_{m_i n}-m_i) \\ +c_{-s+m_i-1}.p_{m_i-1}(s-\alpha_{m_i-1,1}-m_i+1)\ldots(s-\alpha_{m_i-1,n}-m_i+1) \\ +\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +c_{-s}.p_0.(s-\alpha_{01})(s-\alpha_{02})\ldots(s-_{0n}) = 0. \end{cases}$$

Diese Formel unterscheidet sich, abgesehen von den im Zeichen entgegengesetzten, sonst aber gleichlautenden Indices der c, von (1.) nur durch die

umgekehrte Reihenfolge der p und dadurch, dass

$$\alpha_{\lambda\mu} \quad \text{durch} \quad -\alpha_{m_i-\lambda,\mu}$$

ersetzt ist. Setzt man also für s nun eine Wurzel α_{0k}, zu der wenigstens ein von Logarithmen freies Integral gehört, so lautet jedes solches

$$(4.)\quad y_{\infty k} = \left(\frac{1}{x-a_i}\right)^{\alpha_{0k}} \cdot \Phi\left(p_{m_i}, \ldots, p_0; \begin{array}{ccc} \alpha_{0k}-\alpha_{m_i1}, & \ldots, & \alpha_{0k}-\alpha_{m_in} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{0k}-\alpha_{01}, & \ldots, & \alpha_{0k}-\alpha_{0n} \end{array}; \frac{1}{x-a_i}\right),$$

eine Formel, bei der man wiederum leicht die Verallgemeinerung der entsprechenden Eigenschaft der Differentialgleichung der *Gauss*schen Reihe erkennt.

Hiermit ist vermöge unserer Recursionsformel geradezu in Evidenz gesetzt, dass jene Eigenschaften der *Gauss*schen Differentialgleichung, die bisher einerseits noch für alle Differentialgleichungen der *Fuchs*schen Klasse von der zweiten Ordnung (vergl. *Seifert*, In.-Diss., Göttingen, 1875 und *Heffter*, In.-Diss., Berlin, 1886) andererseits auch für alle Differentialgleichungen mit zweigliedriger Recursionsformel (vergl. *Pochhammer*, dieses Journ. Bd. 102 (1888) und Bd. 108 (1891) u. a.) als bestehend erwiesen waren, *sämmtlichen* Differentialgleichungen mit nur regulären Integralen zukommen und zu Tage treten, sobald man jene aus der Recursionsformel stammenden Parameter $\alpha_{\lambda\mu}$ einführt. Es sind dies (im Wesentlichen) dieselben Grössen, die in der „Normalform" des Herrn *Schafheitlin* (vergl. dessen In.-Diss., Halle, 1885 und die Umarbeitung derselben dieses Journ. Bd. 106 (1890)) auftreten. Wenn die Zahl derselben hier grösser erscheint, so rührt das einmal daher, dass dort $m = n$, hier $m \geqq n$ ist und ausserdem hier noch für einen Theil der Grössen, welche direct angebbare ganzzahlige Werthe haben, der Symmetrie der Formeln wegen das Zeichen $\alpha_{\lambda\mu}$ gleichfalls eingeführt wurde. Es war der Zweck dieser Zeilen, auf *diese* Bedeutung der Parameter $\alpha_{\lambda\mu}$ hinzuweisen und damit jene in speciellen Fällen beobachtete Erscheinung als etwas ganz allgemein Gültiges und — wenn man will — geradezu Selbstverständliches zu charakterisiren.

Ueber relativ adjungirte Minoren.

(Von Herrn *Georg Landsberg.*)

Der Begriff der adjungirten Minoren, von welchem die Determinantentheorie Gebrauch macht, lässt sich auf folgende Weise zu dem der ***relativ adjungirten Minoren*** erweitern.

Es sei:

$$(A.) \qquad (a_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

ein quadratisches System von Elementen mit der Determinante A, und es seien:

$$g_1, \; g_2, \; \ldots, \; g_m, \; g_{m+1}, \; \ldots, \; g_{m+\mu}, \; g_{m+\mu+1}, \; \ldots, \; g_n$$

und $\qquad (0 \leqq m < m+\mu < n)$

$$h_1, \; h_2, \; \ldots, \; h_m, \; h_{m+1}, \; \ldots, \; h_{m+\mu}, \; h_{m+\mu+1}, \; \ldots, \; h_n$$

zwei Permutationen der Indices 1 bis n, welche durch eine *gerade* Anzahl von Vertauschungen aus einander hervorgehen; dann sollen die Determinanten $(m+\mu)^{\text{ter}}$ und $(n-\mu)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$|a_{\mathfrak{ab}}| \begin{pmatrix} \mathfrak{a} = g_1, g_2, \ldots, g_m, g_{m+1}, \ldots, g_{m+\mu} \\ \mathfrak{b} = h_1, h_2, \ldots, h_m, h_{m+1}, \ldots, h_{m+\mu} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |a_{\mathfrak{cd}}| \begin{pmatrix} \mathfrak{c} = g_1, g_2, \ldots, g_m, g_{m+\mu+1}, \ldots, g_n \\ \mathfrak{d} = h_1, h_2, \ldots, h_m, h_{m+\mu+1}, \ldots, h_n \end{pmatrix},$$

welche durch Ränderung aus der Determinante m^{ter} Ordnung:

$$\mathrm{A} = |a_{gh}| \qquad \begin{pmatrix} g = g_1, g_2, \ldots, g_m \\ h = h_1, h_2, \ldots, h_m \end{pmatrix}$$

entstehen, in Beziehung auf A relativ adjungirt heissen. Die Determinante A heisse der *Minor der Adjunction.*

Während also z. B. die Determinanten:

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{mm} \quad \text{und} \quad \Sigma \pm a_{m+1,m+1} a_{m+2,m+2} \ldots a_{nn}$$

im gewöhnlichen Sinne adjungirt sind, sind die Determinanten:

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{mm} a_{m+1,m+1} \ldots a_{m+\mu,m+\mu}$$

und

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{mm} a_{m+\mu+1,m+\mu+1} \ldots a_{nn}$$

in Beziehung auf die Determinante:

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{mm}$$

relativ adjungirt. Da man aber unter der Determinante 0ter Ordnung die Einheit zu verstehen hat, so *enthält* der Begriff der relativen Adjunction für $m = 0$ den der gewöhnlichen Adjunction.

Der Zerlegungssatz lautet dann folgendermassen:

(I.) *Hält man in dem Schema:*

$$(S.) \qquad \begin{vmatrix} g_1, & g_2, & \dots, & g_m, & g_{m+1}, & \dots, & g_{m+\mu} \\ h_1, & h_2, & \dots, & h_m, & h'_{m+1}, & \dots, & h'_{m+\mu} \end{vmatrix}$$

die nicht gestrichenen Indices fest, lässt hingegen die gestrichenen Indices alle möglichen Combinationen μ^{ter} Klasse der Indices $h_{m+1}, \dots, h_{m+\mu}, h_{m+\mu+1}, \dots, h_n$ durchlaufen, und multiplicirt jede der so entstehenden Unterdeterminanten mit derjenigen, welche ihr in Beziehung auf den Minor A relativ adjungirt ist, so ist die Summe dieser Producte gleich $A\mathrm{A}$.

Der Beweis lässt sich einmal durch directe Zerlegung führen; durchsichtiger gestaltet er sich aber, wenn man das System der a_{ik} zusammen mit seinem reciproken Systeme*):

$$(a'_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

betrachtet. Es ist nämlich:

$$\begin{pmatrix} g = g_1, g_2, \dots, g_m, \dots, g_{m+\mu} \\ h = h_1, h_2, \dots, h_m, \dots, h_{m+\mu} \end{pmatrix} \qquad |a_{gh}| = A|a'_{\mathfrak{h}\mathfrak{g}}| \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{g} = g_{m+\mu+1}, \dots, g_n \\ \mathfrak{h} = h_{m+\mu+1}, \dots, h_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} g = g_1, g_2, \dots, g_m, g_{m+\mu+1}, \dots, g_n \\ h = h_1, h_2, \dots, h_m, h_{m+\mu+1}, \dots, h_n \end{pmatrix} \qquad |a_{gh}| = A|a'_{\mathfrak{h}\mathfrak{g}}| \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{g} = g_{m+1}, \dots, g_{m+\mu} \\ \mathfrak{h} = h_{m+1}, \dots, h_{m+\mu} \end{pmatrix};$$

relativ adjungirte Minoren in Beziehung auf den Minor A stimmen daher bis auf den Factor A mit adjungirten Minoren des reciproken Theilsystems $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(R.) \qquad (a'_{\mathfrak{h}\mathfrak{g}}) \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{g} = g_{m+1}, \dots, g_{m+\mu}, g_{m+\mu+1}, \dots, g_n \\ \mathfrak{h} = h_{m+1}, \dots, h_{m+\mu}, h_{m+\mu+1}, \dots, h_n \end{pmatrix},$$

dessen Determinante gleich $\frac{\mathrm{A}}{A}$ ist, überein. Zerlegt man daher diese Unterdeterminante nach dem *Laplace*schen Satze in Determinanten μ^{ter} und $(n-m-\mu)^{\text{ter}}$ Ordnung und kehrt sodann mit Hülfe des *Jacobi*schen Satzes über Subdeterminanten reciproker Systeme zum Systeme (a_{ik}) zurück, so erhält man den obigen Satz.

*) *Kronecker,* Ueber Subdeterminanten symmetrischer Systeme. Berliner Sitzungsberichte 1882, S. 821.

hierbei ist:

$$A^{(m)} = \mathrm{A} = |a_{gh}| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, m).$$

In der That, bezeichnet man mit $A_{ht}^{(m)}$ diejenige Determinante, welche aus $A^{(m)}$ entsteht, indem man die h^{te} Colonne durch die t^{te} ersetzt, so ist:

$$A_{st}^{(m+1)} = a_{st} A^{(m)} - \sum_1^m {}_h a_{sh} A_{ht}^{(m)} \qquad (s, t = m+1, \ldots, n);$$

folglich ist, wie es sein muss:

$$\sum_{m+1}^n {}_s a'_{rs} A_{st}^{(m+1)} = \sum_{m+1}^n {}_s a'_{rs} \Big(a_{st} A^{(m)} - \sum_1^m {}_h a_{sh} A_{ht}^{(m)} \Big)$$

$$= A^{(m)} \Big(\delta_{rt} - \sum_1^m {}_h a'_{rh} a_{ht} \Big) + \sum_1^m {}_h A_{ht}^{(m)} \sum_1^m {}_g a'_{rg} a_{gh}$$

$$= A^{(m)} \delta_{rt} - \sum_1^m {}_h A^{(m)} a'_{rh} a_{ht} + \sum_1^m {}_g a'_{rg} a_{gt} A^{(m)}$$

$$= A^{(m)} \delta_{rt}.$$

Demgemäss ist in Uebereinstimmung mit dem zweiten Satze:

$$|A_{rs}^{(m+1)}| = (A^{(m)})^{n-m-1} A \qquad (r, s = m+1, \ldots, n).$$

In diesem Falle kann man offenbar auch alle Unterdeterminanten des Systemes der $A_{rs}^{(m+1)}$ direct durch Determinanten des Systemes der a_{ik} ausdrücken, doch erkennt man leicht, dass man hierdurch nichts Neues, sondern immer nur directe Anwendungen der letzten Gleichung erhält.

Einer gütigen Bemerkung *Kronecker*s verdanke ich den Hinweis darauf, dass die bewiesenen Sätze auch aus jener Theorie der Decomposition quadratischer Systeme fliessen, welche derselbe seit vielen Jahren in seinen Vorlesungen zur Klärung des Determinantenbegriffes angewendet und in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom 6. Juni 1889 veröffentlicht hat. Dieser Theorie zufolge sind zwei Systeme als äquivalent zu betrachten, welche aus einander hervorgehen, indem man irgend eine Colonne des einen Systems, mit einer Constanten multiplicirt, zu einer anderen hinzufügt. Insbesondere kann man es, indem man *nur die m ersten Colonnen zu solchen Compositionen verwendet*, stets erzielen, dass alle diejenigen Elemente des veränderten Systemes verschwinden, deren erster Index kleiner als m oder gleich m und deren zweiter Index grösser als der erste ist. Man hat zu diesem Zwecke die erste Colonne dazu zu verwenden, um alle Elemente der ersten Zeile vom zweiten ab zum Verschwinden zu bringen, die *veränderte* zweite Colonne, um alle Elemente der zweiten Zeile vom dritten ab, u. s. f. schliesslich die m^{te} Colonne zu benutzen, um alle

gegeben, und das System von $n(n+1)$ linearen homogenen Gleichungen:

$$(G.)\qquad \varrho^{(\mathfrak{a})} y_i^{(\mathfrak{a})} = \sum_k a_{ik} x_k^{(\mathfrak{a})} \qquad \left(\begin{smallmatrix} i,\,k=1,\,2,\,\dots\,n \\ \mathfrak{a}=0,\,1,\,2,\,\dots,\,n \end{smallmatrix}\right)$$

ist nach den n^2+n+1 Unbekannten a_{ik} und $\varrho^{(\mathfrak{a})}$ aufzulösen.

Bezeichnet man in den Systemen:

$$(x_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}) \text{ und } (y_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}) \qquad (\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}=0,\,1,\,2,\,\dots\,n)$$

die Adjuncten von $x_0^{(\mathfrak{a})}$ und $y_0^{(\mathfrak{a})}$ resp. durch $X^{(\mathfrak{a})}$ und $Y^{(\mathfrak{a})}$, so ist:

$$(H.)\qquad \sum_{\mathfrak{a}} x_k^{(\mathfrak{a})} X^{(\mathfrak{a})} = 0,\quad \sum_{\mathfrak{a}} y_k^{(\mathfrak{a})} Y^{(\mathfrak{a})} = 0 \qquad \left(\begin{smallmatrix} k=1,\,2,\,\dots,\,n \\ \mathfrak{a}=0,\,1,\,2,\,\dots,\,n \end{smallmatrix}\right)$$

und:

$$\sum_{\mathfrak{a}=0}^{n} \varrho^{(\mathfrak{a})} y_i^{(\mathfrak{a})} X^{(\mathfrak{a})} = 0;$$

folglich:

$$\varrho^{(\mathfrak{a})} X^{(\mathfrak{a})} = p Y^{(\mathfrak{a})} \qquad (\mathfrak{a}=0,\,1,\,2,\,\dots\,n),$$

wodurch die Grössen $\varrho^{(\mathfrak{a})}$ bis auf einen willkürlichen Proportionalitätsfactor p bestimmt sind. Um weiter die Grössen a_{ik} zu berechnen, setzen wir:

$$\frac{\partial X^{(\mathfrak{a})}}{\partial x_k^{(\mathfrak{b})}} = X_{\mathfrak{b}k}^{(\mathfrak{a})},\quad \frac{\partial Y^{(\mathfrak{a})}}{\partial y_k^{(\mathfrak{b})}} = Y_{\mathfrak{b}k}^{(\mathfrak{a})} \qquad \left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{a},\,\mathfrak{b}=0,\,1,\,2,\,\dots,\,n \\ k=1,\,2,\,\dots,\,n \end{smallmatrix}\right)$$

und finden hierdurch:

$$a_{ik} = p\sum_{\mathfrak{a}} \frac{y_i^{(\mathfrak{a})} Y^{(\mathfrak{a})} X_{\mathfrak{a}k}^{(\mathfrak{b})}}{X^{(\mathfrak{a})} X^{(\mathfrak{b})}} \qquad \left(\begin{smallmatrix} i,\,k=1,\,2,\,\dots,\,n \\ \mathfrak{a},\,\mathfrak{b}=0,\,1,\,2,\,\dots,\,n \end{smallmatrix}\right).$$

Da aber hierin der Index $\mathfrak{b}$ ganz willkürlich ist, so muss sein:

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{y_i^{(\mathfrak{a})} Y^{(\mathfrak{a})}}{X^{(\mathfrak{a})}} \cdot \frac{X_{\mathfrak{a}k}^{(\mathfrak{b})} X^{(\mathfrak{c})} - X_{\mathfrak{a}k}^{(\mathfrak{c})} X^{(\mathfrak{b})}}{X^{(\mathfrak{b})} X^{(\mathfrak{c})}} = 0 \qquad \left(\begin{smallmatrix} i,\,k=1,\,2,\,\dots,\,n \\ \mathfrak{a},\,\mathfrak{b},\,\mathfrak{c}=0,\,1,\,2,\,\dots,\,n \end{smallmatrix}\right).$$

Vergleicht man diese Identität mit der Identität $(H.)$, so folgt, da $X_{\mathfrak{b}k}^{(\mathfrak{b})} = X_{\mathfrak{c}k}^{(\mathfrak{c})} = 0$ ist:

$$X_{\mathfrak{b}k}^{(\mathfrak{c})} = -X_{\mathfrak{c}k}^{(\mathfrak{b})},$$

und allgemein:

$$X_{\mathfrak{a}k}^{(\mathfrak{b})} X^{(\mathfrak{c})} - X_{\mathfrak{a}k}^{(\mathfrak{c})} X^{(\mathfrak{b})} = X^{(\mathfrak{a})} X_{\mathfrak{c}k}^{(\mathfrak{b})} \qquad \left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{a},\,\mathfrak{b},\,\mathfrak{c}=0,\,1,\,2,\,\dots,\,n \\ k=1,\,2,\,\dots,\,n \end{smallmatrix}\right).$$

Diese Determinantengleichung, welche sich hier ergeben hat, ist nichts anderes, als ein specieller Fall des Satzes (I.). Man kann aus ihr durch Summation die merkwürdige Relation ableiten:

$$\sum_{\mathfrak{b}} \frac{X_{\mathfrak{b}+1,k}^{(\mathfrak{b})}}{X^{(\mathfrak{b})} X^{(\mathfrak{b}+1)}} = 0 \qquad \left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{b}=0,\,1,\,2,\,\dots,\,n \\ k=1,\,2,\,\dots,\,n \end{smallmatrix}\right),$$

wobei der Index $n+1$ durch 0 zu ersetzen ist.

Zur Theorie der periodischen Kettenbrüche.

(Von Herrn *Georg Landsberg*.)

Es werde der Zähler und der Nenner des Kettenbruchs:

$$g_\mu + \cfrac{h_{\mu+1}}{g_{\mu+1} + \cfrac{h_{\mu+2}}{g_{\mu+2} + \cdots + \cfrac{h_{\nu-1}}{g_{\nu-1}}}} \qquad (\mu \leqq \nu)$$

durch $Z_{\mu\nu}$, resp. durch $N_{\mu\nu}$ bezeichnet; dann ist:

$$N_{\mu\nu} = Z_{\mu+1,\nu}; \quad Z_{\mu\mu} = 1, \quad Z_{\mu,\mu+1} = g_\mu.$$

Bekanntlich sind auf einander folgende Zähler und Nenner der Näherungsbrüche durch die Relationen verbunden:

$$\text{(I.)} \qquad Z_{p+1,r+1} = g_r Z_{p+1,r} + h_r Z_{p+1,r-1} \qquad (p \leqq r-2),$$

$$\text{(I'.)} \qquad Z_{qs} = g_q Z_{q+1,s} + h_{q+1} Z_{q+2,s} \qquad (q \leqq s-2),$$

$$\text{(II.)} \qquad Z_{qr} Z_{q+1,r+1} - Z_{q,r+1} Z_{q+1,r} = \prod_{\varkappa=q+1}^{r} (-h_\varkappa) \qquad (q < r).$$

Aus der Gleichung (II.) leitet man leicht durch den *Bernoulli*schen Schluss die allgemeinere Relation her:

$$\text{(II}^a\text{.)} \qquad Z_{qr} Z_{q+1,s} - Z_{qs} Z_{q+1,r} = Z_{r+1,s} \prod_{\varkappa=q+1}^{r} (-h_\varkappa) \qquad (q < r < s),$$

und hieraus fliesst die noch allgemeinere Gleichung:

$$\text{(III.)} \qquad \prod_{\varkappa=q+1}^{r} (-h_\varkappa) Z_{p+1,q} Z_{r+1,s} - Z_{p+1,r} Z_{q+1,s} + Z_{p+1,s} Z_{q+1,r} = 0 \quad (p < q < r < s).$$

Denn zufolge der Gleichung (II^a.) ist die Summe:

$$Z_{p+1,q} \prod_{\varkappa=\mu+1}^{p} (-h_\varkappa) . Z_{r+1,s} \prod_{\varkappa=\mu+1}^{r} (-h_\varkappa) - Z_{p+1,r} \prod_{\varkappa=\mu+1}^{p} (-h_\varkappa) . Z_{q+1,s} \prod_{\varkappa=\mu+1}^{q} (-h_\varkappa)$$
$$+ Z_{p+1,s} \prod_{\varkappa=\mu+1}^{p} (-h_\varkappa) . Z_{q+1,r} \prod_{\varkappa=\mu+1}^{q} (-h_\varkappa).$$

in welcher μ irgend einen Index $< p$ bedeutet, identisch mit der verschwindenden Determinante:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} Z_{\mu p} & Z_{\mu q} & Z_{\mu r} & Z_{\mu s} \\ Z_{\mu+1,p} & Z_{\mu+1,q} & Z_{\mu+1,r} & Z_{\mu+1,s} \\ Z_{\mu p} & Z_{\mu q} & Z_{\mu r} & Z_{\mu s} \\ Z_{\mu+1,p} & Z_{\mu+1,q} & Z_{\mu+1,r} & Z_{\mu+1,s} \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung (III.) ist eine Verallgemeinerung derjenigen Relation, welche *Kronecker* für Kettenbrüche mit den Theilzählern -1 angegeben hat*); sie enthält alle früheren Relationen in sich, denn es gehen die Gleichungen (I.), (I'.), (II^a.) aus ihr hervor, indem man entweder $q = r-1$, $s = r+1$ oder $r = q+1$, $p = q-1$ oder bloss $p = q-1$ setzt.

Nach Darlegung der Fundamentalgleichung, welche für die allgemeinen Kettenbrüche in Geltung ist, soll die Untersuchung auf die periodischen Kettenbrüche dieser Art beschränkt werden, und zwar sollen hierbei vorzugsweise die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der Convergenz und die Beziehungen, in welchen die Kettenbruchentwickelungen conjugirter Wurzeln quadratischer Gleichungen stehen, ermittelt werden. Voraus sei hierbei bemerkt, dass, wenn zwei unbestimmte Variabeln y und y_1 durch die lineare Relation:

$$(1.)\qquad y = g_0 + \cfrac{h_1}{g_1 + \cdots + \cfrac{h_{n-1}}{g_{n-1} + \cfrac{h_n}{y_1}}} = \frac{Z_n y_1 + Z_{n-1} h_n}{N_n y_1 + N_{n-1} h_n}$$

mit einander verbunden sind, für die Umkehrung offenbar die Kettenbruchentwickelung gilt:

$$(2.)\qquad -y_1 = \cfrac{h_n}{g_{n-1} + \cfrac{h_{n-1}}{g_{n-2} + \cdots + \cfrac{h_2}{g_1 + \cfrac{h_1}{g_0 - y}}}} = \frac{h_n(Z_{n-1} - y N_{n-1})}{Z_n - y N_n}.$$

Dabei mag in den Formeln (1.) und (2.), wie überall im Folgenden, bei solchen Z und N, welche nur einen Index haben, der vordere Index 0 hinzugedacht werden.

---

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 14. Februar 1878, S. 79.

Da D von Null verschieden ist, so hat diese Gleichung nur dann zwei gleiche Wurzeln, wenn:

$$D = -4 \prod_{x=1}^{n} (-h_x),$$

also $M_1 = M_2 = -1$ ist. Diesen Fall vorläufig ausgeschlossen, muss die eine Wurzel der reciproken Gleichung (8.) ihrem absoluten Betrage nach nothwendig kleiner, die andere grösser als 1 sein; wir dürfen daher $|M_1| < 1$ annehmen.

Bricht man jetzt den Kettenbruch (3.) nach dem $(mn+r)$ten Gliede ab ($r = 1, 2, \dots, n$), so berechnet man diesen Näherungsbruch, indem man zuerst die Transformation (6.) m-mal anwendet, sodann in die Gleichung:

$$(9.) \qquad \frac{y-\xi_1}{y-\xi_2} = M_1^m \frac{y_m-\xi_1}{y_m-\xi_2}$$

für y_m den Kettenbruch:

$$g_0 + \cfrac{h_1}{g_1 + \dots + \cfrac{h_{r-1}}{g_{r-1}}} = \frac{Z_r}{N_r} \qquad (r = 1, 2, \dots, n)$$

einsetzt, und die entstehende lineare Gleichung nach y auflöst. Da aber $\lim\limits_{m=\infty} M_1^m = 0$ ist, so wird bei hinreichend grossem m der Näherungsbruch von ξ_1 beliebig wenig differiren, gleichviel welcher der n Werthe $\frac{Z_r}{N_r}$ in der Gleichung (9.) für y_m gewählt werden möge. Die Wurzel ξ_1 ist hierbei vollständig dadurch charakterisirt, dass sie mit der absolut *kleineren* Wurzel M_1 der quadratischen Gleichung (8.) durch die Transformationsgleichung (7.) zusammenhängt; da aber die Gleichung (2.) nur die Umkehrung von (1.) war und somit bei Iteration ganz ebenso auf die Gleichung (9.) führt, so muss der periodische Kettenbruch:

$$(10.) \qquad \cfrac{h_n}{g_{n-1} + \cfrac{h_{n-1}}{g_{n-2} + \dots + \cfrac{h_2}{g_1 + \cfrac{h_1}{g_0 + \cfrac{h_n}{g_{n-1} + \cdots}}}}}$$

nothwendig gegen die negativ genommene Wurzel ξ_2 convergiren. Fassen wir zusammen, so haben wir den Satz:

Sind die Voraussetzungen erfüllt:

a) $N_n \neq 0$; b) $D > 0$; c) $D + 4 \prod_{x=1}^{n} (-h_x) \neq 0$ *oder* $h_n N_{n-1} + Z_n \neq 0$,

so convergirt der rein periodische Kettenbruch (3.) *gegen diejenige Wurzel der quadratischen Gleichung* (4.), *welche mit der absolut kleineren Wurzel der quadratischen Gleichung* (8.) *durch die Gleichung* (7.) *zusammenhängt, der rein periodische Kettenbruch* (10.) *gegen die negativ genommene andere Wurzel.*

Dieser Satz erleidet jedoch eine bemerkenswerthe Ausnahme, auf welche Herr *Thiele* an dem Beispiele des sechsgliedrigen periodischen Kettenbruchs mit den Theilzählern $h_\varkappa = 1$ und den Theilnennern:

$$g_0 = 4, \quad g_1 = -1, \quad g_2 = \tfrac{5}{2}, \quad g_3 = -1, \quad g_4 = -1, \quad g_5 = -1, \; g_{r+6n} = g_r$$

hingewiesen hat*). Wenn nämlich zufällig einer der ersten n Näherungsbrüche $\frac{Z_r}{N_r}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ gleich der zweiten Wurzel ξ_2 ist, so zeigt die Gleichung (9.), dass alle Näherungsbrüche, deren Index mod. n dieser Zahl r congruent sind, ebenfalls gleich ξ_2 sind. Es kann also in diesem Falle geschehen, dass ein Theil der Näherungsbrüche, deren Indices um n von einander abstehen, durchweg gleich ξ_2 *sind*, während die anderen Näherungsbrüche gegen den Grenzwerth ξ_1 *convergiren*, so dass die Reihe im gewöhnlichen Sinne des Wortes nicht mehr convergent genannt werden kann. So convergirt die Reihe der Näherungsbrüche des *Thiele*schen Kettenbruchs im allgemeinen gegen den Grenzwerth $\frac{8}{5}$; es treten aber, wie weit man auch gehen möge, immer wieder Näherungsbrüche auf, deren Werth gleich 1 ist, nämlich alle diejenigen, deren Index $\equiv 4$ (mod. 6) ist. Ich erwähne in dieser Beziehung den dreigliedrigen periodischen Kettenbruch:

$$x = 1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{n}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 + \cdots}}}},$$

welcher folgende Eigenschaften besitzt: Jeder Näherungsbruch, dessen Index $\equiv 1$ (mod. 3) ist, *ist* $= 1$, jeder Näherungsbruch, dessen Index $\equiv 2$ (mod. 3) ist, *ist* $= 0$, die Reihe der Näherungsbrüche, deren Index durch 3 theilbar ist, *convergirt* gegen den Grenzwerth 1 oder gegen den Grenzwerth 0, je nachdem der absolute Betrag von n grösser oder kleiner als 1 ist; wenn

*) Bemärkninger om periodiske Kjädebrökers Konvergens. *Zeuthens* Tidsskrift, Ser. 4, Bd. III. Da mir diese Note nicht zugänglich wurde, so kann ich dieselbe nur nach dem Referate in Band 11 (1879) des Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik citiren.

$n = -1$ ist, so erhält jeder dritte Näherungsbruch den Nenner 0, wenn $n = +1$ ist, so erhält jeder sechste Näherungbruch den Nenner 0, während jeder Näherungsbruch, dessen Index $\equiv 3 \pmod{6}$ ist, gleich $\frac{1}{2}$ ist; in beiden Fällen tritt also Divergenz ein.

Betrachten wir jetzt den bisher ausgeschlossenen Fall, in welchem

$$\text{a) } N_n \neq 0; \quad \text{b) } D > 0; \quad \text{c) } D + 4\prod_{x=1}^{n}(-h_x) = 0 \quad \text{oder } h_n N_{n-1} + Z_n = 0$$

ist, so ist aus der Gleichung (9.) ersichtlich, da $M_1 = -1$ ist, dass die Reihe der Näherungsbrüche zwischen einer endlichen Anzahl verschiedener Werthe oscillirt, so dass von Convergenz im allgemeinen nicht die Rede ist. Dieser Fall gehört seiner Natur nach bereits zu dem folgenden, in welchem:

B. $N_n \neq 0$, $D < 0$, die Wurzeln der quadratischen Gleichung (4.) also imaginär angenommen werden. Die Formel (7.) zeigt nämlich, dass in diesem Falle $|M_1| = 1$ ist; setzt man also $M_1 = e^{i\varphi}$, so erhält man für $\varphi = \pi$ den letzten Fall der vorigen Nummer. Die Gleichung (9.) zeigt, dass alsdann für wachsendes m die Amplitude von $\frac{y-\xi_1}{y-\xi_2}$ um Vielfache von φ zunimmt. *Wenn daher die Discriminante der quadratischen Gleichung* (4.) *negativ ist, so divergiren die Kettenbrüche* (3.) *und* (10.).

C. Ist $N_n \neq 0$, $D = 0$, so leitet man aus den Gleichungen:

$$(11.)\qquad N_n x^2 + (h_n N_{n-1} - Z_n)x - h_n Z_{n-1} = N_n(x-\xi)^2,$$

$$(12.)\qquad \begin{cases} h_n N_{n-1} - Z_n = -2N_n\xi, \\ -h_n Z_{n-1} = N_n \xi^2, \\ (h_n N_{n-1} + Z_n)^2 = 4\prod_{x=1}^{n}(-h_x) \end{cases}$$

für y und y_1 leicht die Beziehungen ab:

$$(13.)\qquad (y-\xi)(y_1-\xi) = \frac{\sqrt{\prod_{x=1}^{n}(-h_x)}}{N_n}(y_1-y)$$

oder

$$(13^a.)\qquad \frac{1}{y-\xi} - \frac{1}{y_1-\xi} = \frac{N_n}{\sqrt{\prod_x(-h_x)}} = \frac{2N_n}{h_n N_{n-1} + Z_n} \qquad (x = 1, 2, \ldots, n).$$

Hieraus zieht man, ähnlich wie in Nummer A. den Schluss: *Wenn die Discriminante der quadratischen Gleichung* (4.) *verschwindet, so convergiren*

sowohl der Kettenbruch (3.), *wie der Kettenbruch* (10.) *gegen die Wurzel der Gleichung.*

D. Ist $N_n = 0$, so nimmt die Gleichung (1.) folgende Gestalt an:

$$y = \frac{Z_n y_1 + h_n Z_{n-1}}{h_n N_{n-1}},$$

oder wenn $h_n N_{n-1} - Z_n$ von Null verschieden ist:

$$y - \frac{h_n Z_{n-1}}{h_n N_{n-1} - Z_n} = \frac{Z_n}{h_n N_{n-1}} \left(y_1 - \frac{h_n Z_{n-1}}{h_n N_{n-1} - Z_n} \right). \tag{14.}$$

Zufolge der Relation:

$$-Z_n N_{n-1} = \prod_{x=1}^{n-1} (-h_x)$$

ist der auftretende Factor $\frac{Z_n}{h_n N_{n-1}}$ von Null und Unendlich verschieden; durch Iteration der Transformation (14.) erschliesst man daher, wie vorher, den Satz:

Wenn die Gleichung (4.) *linear wird, so convergirt diejenige der beiden Kettenbruchentwickelungen* (3.) *und* (10.), *für welche der absolute Betrag von* $\frac{Z_n}{h_n N_{n-1}}$ *kleiner als* 1 *ist, gegen die Wurzel der Gleichung, während die andere divergirt.* Wenn $N_{n-1} = 0$ und $Z_n \pm h_n N_{n-1} = 0$ ist, so erkennt man leicht, dass beide Entwickelungen *divergiren.*

Sur la détermination des lignes dont le rapport de la courbure à la torsion est une fonction donnée de l'arc.

(Par M. *Geminiano Pirondini* à Parme.)

On sait que M. *Bertrand* a, le premier, démontré que toute ligne dans laquelle le rapport de la courbure à la torsion est constant, est une hélice. Ce théorème et son réciproque définissent d'une manière très nette une famille de lignes.

Dans cette note, je vais envisager la question générale, c'est-à-dire la détermination des lignes dans lesquelles le rapport de la courbure à la torsion est une fonction donnée de l'arc, et je fais plusieurs applications aux cas particuliers les plus remarquables.

Lorsque à une relation $\frac{\varrho}{r} = f(s)$, $f(s)$ étant une fonction donnée de l'arc, correspondent toutes les courbes d'une certaine famille F et seulement celles-ci, nous dirons que la relation susdite *caractérise* la famille F.

§ I.

Soit L une ligne géodésique de la surface développable Σ dont l'arête de rebroussement est L_0; désignons par s, ϱ, r, i l'arc, le rayon de courbure, le rayon de torsion et l'inclinaison de L sur les génératrices rectilignes de Σ.

Si l'on déroule la surface Σ sur un plan, la ligne L_0 se réduit à une ligne plane Λ_0 et L à une droite; que l'on prenne cette droite pour axe des x et sa perpendiculaire à l'origine des arcs s pour axe des y. On a:

$$s = \frac{x\,dy - y\,dx}{dy};$$

d'ailleurs, si l'on rappelle que pour toutes les géodésiques d'une surface développable on a la relation:

$$\frac{\varrho}{r} = \cot i,$$

on peut écrire l'égalité:

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{dx}{dy}.$$

Nous avons donc le théorème: *Si, relativement à une ligne à double courbure L, le rapport* $\frac{\varrho}{r}$ *est une fonction donnée* $\varphi(s)$ *de l'arc s, la ligne plane* A_0*, à laquelle se réduit l'arête de rebroussement* L_0 *de la surface développable rectifiante de L, lorsque cette surface se déroule sur un plan, vérifiera l'équation différentielle:*

$$(1.)\qquad \frac{dx}{dy} = \varphi\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{dy}\right).$$

Que l'on suppose réciproquement que la ligne plane A_0 soit représentée par l'équation:

$$y = \psi(x),$$

et que le plan de la ligne soit réduit à une surface développable moyennant une suite de flexions infinitésimales autour des tangentes de A_0; soit L la ligne à double courbure à laquelle se réduit l'axe des x. On a:

$$(2.)\qquad s = \frac{x\,dy - y\,dx}{dy} = x - \frac{\psi(x)}{\psi'(x)};\quad \frac{r}{\varrho} = \frac{dy}{dx} = \psi'(x);$$

et si l'on désigne par $x = f\left(\frac{\varrho}{r}\right)$ la valeur de x que l'on obtient par la résolution de la deuxième équation (2.), on déduit l'égalité:

$$(3.)\qquad s = f\left(\frac{\varrho}{r}\right) - \frac{\varrho}{r}\,\psi\left[f\left(\frac{\varrho}{r}\right)\right].$$

Il subsiste donc le théorème: *Si le plan d'une ligne* A_0 *représentée par l'équation* $y = \psi(x)$*, est réduit à une surface développable, moyennant une suite de flexions infinitésimales autour des tangentes de* A_0*, la ligne L à laquelle se réduit l'axe des x, vérifiera la relation* (3.), $f\left(\frac{\varrho}{r}\right)$ *étant la valeur de x que l'on dérive de la deuxième équation* (2.).

§ II.

Bien que l'on puisse tirer parti de ce que l'on démontrera au § III., les propriétés exposées suffisent, à elles seules, pour la résolution du problème proposé.

A cet égard on doit remarquer que, si l'équation intégrale générale de (1.) représente une suite de droites, aucune de celles-ci ne peut être

la ligne plane $\mathcal{A}_0$; la ligne demandée est ordinairement l'enveloppe de ces droites et son équation est l'intégrale singulière de (1.).

Exemple 1°. Si $\frac{\varrho}{r} = \frac{s}{a} + b$, a et b étant des constantes, on déduit de l'équation (1.):

$$(a+y)dx = (b+x)dy,$$

d'où par intégration:

$$b+x = c(a+y),$$

c étant une constante arbitraire.

Quelle que soit la valeur de c, l'équation que l'on vient d'écrire représente une droite passant par le point fixe dont les coordonnées sont:

$$x = -b, \quad y = -a.$$

La ligne plane $\mathcal{A}_0$ se réduit donc à un point et la surface développable Σ à un cône.

On ne peut pas, dans ce cas, démontrer la propriété réciproque par l'application du deuxième théorème du § I; mais il est bien facile de démontrer que pour toute géodésique d'un cône on a:

$$\operatorname{tang} i = \frac{s}{a} + b,$$

d'où l'on déduit l'égalité:

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{s}{a} + b.$$

Donc: *La relation* $\frac{\varrho}{r} = \frac{s}{a} + b$ *caractérise complètement la ligne géodésique d'un cône.*

On reconnaît aisément que, dans cette égalité, la constante a représente la plus courte distance entre le sommet du cône et la géodésique.

Le théorème que l'on vient de démontrer, est bien remarquable; si l'on suppose $a = \infty$, la surface devient un cylindre et l'égalité précédente revient à la suivante: $\frac{\varrho}{r} =$ constante, qui exprime le théorème bien connu de M. *Bertrand.*

Exemple 2°. Considérons, avec plus de généralité, les lignes dans lesquelles on a:

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)^m = \frac{a}{s},$$

a et m étant des constantes.

L'équation différentielle (1.) nous donne:

$$y = x\frac{dy}{dx} - a\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m+1},$$

dont l'intégrale générale est:

$$y = cx - ac^{m+1},$$

(c étant une constante arbitraire), tandis que l'intégrale singulière est:

$$a\left(\frac{y}{m}\right)^m = \left(\frac{x}{m+1}\right)^{m+1}.$$

Si l'on remarque que la première équation représente une suite de droites, on conclut que la ligne plane Λ_0 sera représentée par la deuxième équation.

Il faut cependant s'assurer que la propriété réciproque a lieu; cela n'offre pas de difficulté, puisque si dans le deuxième théorème du § I on suppose:

$$\psi(x) = y = a^{\frac{1}{m}}.m\cdot\left(\frac{x}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{m}},$$

on arrive, après quelques calculs, à l'équation:

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)^m = \frac{a}{s}$$

d'où nous sommes parti.

On a donc le théorème: *La ligne la plus générale L pour laquelle est vérifiée la relation*

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)^m = \frac{a}{s}$$

entre ses rayons de courbure et l'arc, est caractérisée par la propriété que l'arête de rebroussement L_0 de la développable rectifiante, lorsque cette surface se déroule sur un plan, se réduit à la ligne plane Λ_0 définie par l'équation:

$$a\left(\frac{y}{m}\right)^m = \left(\frac{x}{m+1}\right)^{m+1}$$

et la géodésique L à l'axe des x.

Ce théorème donne une construction géométrique des lignes dont on vient de parler.

Cas particuliers. Si l'on suppose successivement $m=1$, $m=-2$, $m=-\frac{1}{2}$, on aura respectivement:

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{a}{s}; \quad \frac{\varrho}{r} = \sqrt{\frac{s}{a}}; \quad \frac{\varrho}{r} = \left(\frac{s}{a}\right)^2.$$

L'arête de rebroussement L_0 de la développable rectifiante Σ, après le développement de la surface sur un plan, devient la parabole:

$$y = \frac{1}{4a}x^2,$$

ou bien la parabole:

$$y^2 = -4ax,$$

ou bien l'hyperbole équilatère:

$$-4xy = a^2.$$

La ligne géodésique L de Σ se réduit respectivement à la tangente de la première parabole au sommet, à l'axe de la deuxième parabole et à une des asymptotes de l'hyperbole.

§ III.

Nous allons maintenant déterminer les rayons de courbure et de torsion ϱ_0, r_0 de l'arête de rebroussement de la développable Σ au moyen des rayons ϱ, r de la géodésique.

Nous nous rapportons, pour cette détermination, à la figure que l'on obtient en déroulant Σ sur un plan; si sur ce plan le choix des axes de coordonnées est fait de la manière que l'on vient d'indiquer au § I, les coordonnées x_0, y_0 d'un point quelconque de la ligne Λ_0 seront:

$$x_0 = s + T.\cos i, \quad y_0 = T.\sin i,$$

T étant la distance entre deux points correspondants des lignes L, L_0. La détermination de T s'effectue d'une manière très facile, et l'on aura:

$$(4.) \qquad T = \frac{\sin i}{\frac{di}{ds}}.$$

Si donc s_0 est l'arc de Λ_0, il résulte:

$$(5.) \qquad \frac{ds_0}{ds} = \cos i + \frac{dT}{ds}$$

et conséquemment:

$$\frac{d^2x_0}{ds_0^2} = -\frac{\sin i \cdot \frac{di}{ds}}{\cos i + \frac{dT}{ds}}, \quad \frac{d^2y_0}{ds_0^2} = \frac{\cos i \cdot \frac{di}{ds}}{\cos i + \frac{dT}{ds}}.$$

Le rayon de courbure de la ligne à double courbure L_0 est aussi le rayon

de courbure de la ligne plane Λ_0, et les dernières formules nous donnent:

$$\varrho_0 = \frac{\frac{dT}{ds} + \cos i}{\frac{di}{ds}}.$$

Quant à la détermination de r_0, on doit remarquer que les normales principales de L sont parallèles aux binormales de L_0 et par conséquent:

$$\frac{ds_0}{r_0} = \sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}} \cdot ds.$$

Si l'on rappelle l'égalité (5.), on déduit d'ici:

$$r_0 = \frac{\frac{dT}{ds} + \cos i}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}};$$

et si aux formules que l'on vient d'écrire, on ajoute l'autre:

$$\operatorname{tang} i = \frac{r}{\varrho},$$

on a le théorème: *Le rayon de courbure ϱ_0, celui de torsion r_0 de l'arête de rebroussement L_0 de la développable rectifiante d'une ligne à double courbure quelconque L, et la distance T entre deux points correspondants des lignes L_0 et L sont données par les équations suivantes:*

$$(6.)\quad \begin{cases} \varrho_0 = \dfrac{T\left\{1+\sqrt{1+\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2}\cdot\frac{dT}{ds}\right\}}{\frac{r}{\varrho}}; \quad r_0 = \dfrac{r\left\{1+\sqrt{1+\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2}\cdot\frac{dT}{ds}\right\}}{1+\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2}; \\[2ex] T = \dfrac{r}{\varrho}\,\dfrac{\sqrt{1+\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2}}{\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{\varrho}\right)}. \end{cases}$$

§ IV.

Applications des formules du § III.

α) On peut donner une autre démonstration du remarquable théorème du § II, en se rapportant aux équations (6.); en effet, la condition nécessaire et suffisante pour que la surface développable Σ soit un cône, est que la ligne L_0 se réduise à un point, condition qui n'est autrement remplie que par $\varrho_0 = r_0 = 0$.

Or, si l'on pose pour simplifier $\frac{r}{\varrho} = \theta$, les formules (6.) nous donnent:

$$(7.)\qquad \varrho_0 = \frac{(1+\theta^2)^{\frac{3}{2}}(2\theta'^2-\theta\theta'')}{\theta'^3}, \quad r_0 = \frac{r(2\theta'^2-\theta\theta'')}{\theta'^2};$$

on doit donc avoir:

$$\theta\theta'' = 2\theta'^2.$$

Si $\theta' = 0$, on a $\frac{r}{\varrho}$ = constante et la courbe est une hélice; ce cas peut être laissé de côté.

Si $\theta' \gtrless 0$, on peut écrire:

$$\frac{\theta''}{\theta'} = \frac{2\theta'}{\theta},$$

ce qui donne:

$$\log\theta' = \log\theta^2 - \log a,$$

a étant une constante. On déduit de cette égalité:

$$\frac{d\theta}{\theta^2} = \frac{ds}{a},$$

d'où par intégration:

$$\frac{1}{\theta} = \frac{\varrho}{r} = b - \frac{s}{a};$$

c'est bien la relation qui caractérise les géodésiques d'un cône.

β) La condition T = constante $= a$, à cause de (4.), équivaut à l'autre:

$$\frac{di}{\sin i} = \frac{ds}{a},$$

d'où par intégration:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}i = ke^{\frac{s}{a}},$$

k étant une constante quelconque. On obtient d'ici:

$$\cot i = \frac{\varrho}{r} = \frac{1}{2k}(e^{-\frac{s}{a}} - k^2e^{\frac{s}{a}}),$$

ce qui donne: ***La relation que l'on vient d'écrire, caractérise la ligne à double courbure à laquelle se réduit l'asymptote d'une tractrice, moyennant une suite de flexions infinitésimales du plan de cette ligne autour de ses tangentes.***

Les équations (7.) nous donnent:

$$\frac{r_0}{r} = \frac{2\theta'^2-\theta\theta''}{\theta'^2};$$

et puisque θ, ainsi que θ' et θ'', sont invariables dans toute flexion de la

développable rectifiante conservant les génératrices rectilignes, on peut dire: ***Le rapport du rayon de torsion d'une ligne quelconque au rayon de torsion correspondant de l'arête de rebroussement de la surface rectifiante est invariable pendant toute flexion de cette surface effectuée de manière à conserver les génératrices rectilignes.***

Si l'on cherche les lignes pour lesquelles le rapport $\frac{r_0}{r}$ est une constante k, on doit intégrer l'équation différentielle:

$$(2-k)\theta'^2 = \theta\theta''.$$

Si $\theta' \gtrless 0$, ce que l'on peut bien supposer, il viendra:

$$(2-k)\frac{\theta'}{\theta} = \frac{\theta''}{\theta'},$$

d'où par intégration:

$$\theta' = m\theta^{2-k},$$

m étant une constante. Cela posé, il y aura deux cas à considérer.

I°. *Soit* $k \gtrless 1$. En écrivant:

$$\theta^{k-2}.d\theta = m.ds,$$

une nouvelle intégration nous donne:

$$\theta^{k-1} = \frac{s}{a} + h,$$

a et h étant des constantes arbitraires.

On peut toujours supposer $h = 0$, par un choix convenable de l'origine de l'arc s; en rappelant de plus que $\theta = \frac{r}{\varrho}$, on peut écrire:

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k-1} = \frac{a}{s}.$$

Si l'on compare cette équation à celle que l'on a obtenue à l'exemple II°. du § II, on aura le théorème:

Les lignes pour lesquelles la relation a lieu:

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)^m = \frac{a}{s}$$

(lignes que l'on a déterminées au § II) ***sont caractérisées par la propriété que le rapport*** $\frac{r_0}{r}$ ***de leur torsion à celle de l'arête de rebroussement de la développable rectifiante est une constante*** k***; cette constante est définie par l'égalité*** $k = 1 + m$.

II^0. *Soit* $k = 1$. L'équation à intégrer devient;

$$\theta' = m\theta,$$

d'où:

$$\theta = n.e^{ms},$$

n étant une constante; on aura donc dans ce cas:

$$\frac{r}{\varrho} = n.e^{ms},$$

c'est-à-dire:

$$\frac{dy}{dx} = n.e^{m.\frac{xy'-y}{y'}}.$$

Cette équation a pour intégrale générale:

$$y = c\left\{x + \log\left(\frac{n}{c}\right)^{\frac{1}{m}}\right\},$$

qui représente une suite de droites; celles-ci enveloppent la ligne représentée par l'intégrale singulière, que l'on obtient par l'élimination de $\frac{dy}{dx}$ entre les deux équations suivantes:

$$x + \frac{1}{m}\left(\log n - 1 - \log\frac{dy}{dx}\right) = 0; \quad y = \left(x - \frac{1}{m}\log\frac{dy}{dx} + \frac{1}{m}\log n\right)\frac{dy}{dx}.$$

Et puisque cette élimination nous donne:

$$y = \frac{n}{m}e^{mx-1},$$

on aura le théorème: *La ligne à double courbure à laquelle se réduit l'asymptote de la ligne logarithmique* $y = \frac{n}{m}e^{mx-1}$, *par des flexions infinitésimales du plan de la ligne autour de ses tangentes, est la seule dont le rayon de torsion soit égal au rayon de torsion de l'arête de rebroussement de la développable rectifiante. Une telle ligne est aussi caractérisée par la relation:*

$$\frac{r}{\varrho} = n.e^{ms}.$$

Cas particuliers. Si, conformément aux cas particuliers du § II, nous faisons successivement $m = 1$, $m = -2$, $m = -\frac{1}{2}$, on aura respectivement:

$$k = 2, \quad k = -1, \quad k = \tfrac{1}{2}.$$

Donc: *Les lignes à double courbure auxquelles se réduit la tangente à une parabole au sommet, l'axe d'une parabole et une des asymptotes d'une*

hyperbole équilatère moyennant une suite de flexions infinitésimales du plan de ces coniques autour de leurs tangentes, sont caractérisées par la propriété que le rapport $\frac{r_0}{r}$ de la torsion de la ligne à celle de l'arête de rebroussement de leur développable rectifiante est respectivement égal à 2, —1, ½.

§ V.

Si l'on rappelle la formule (4.) et l'autre $\operatorname{tang} i = \frac{r}{\varrho}$, l'égalité (5.) et la première des relations (6.) nous donneront:

$$ds_0 = \frac{2\cos i\left(\frac{di}{ds}\right)^2 - \sin i\,\frac{d^2i}{ds^2}}{\left(\frac{di}{ds}\right)^2}\,ds;\quad \varrho_0 = \frac{2\cos i\left(\frac{di}{ds}\right)^2 - \sin i\,\frac{d^2i}{ds^2}}{\left(\frac{di}{ds}\right)^3}.$$

Ces formules peuvent s'appliquer aussi lorsque la développable rectifiante de la ligne a été déroulée sur un plan; on peut donc résoudre le problème de déterminer la ligne plane enveloppée par une droite mobile tournant autour d'un de ses points, pendant que celui-ci se déplace sur une droite donnée.

En effet, si l'on suppose:

$$i = f(s),$$

$f(s)$ étant une fonction donnée de s, on aura:

$$s_0 = \int \frac{2\cos f\cdot\left(\frac{df}{ds}\right)^2 - \sin f\cdot\frac{d^2f}{ds^2}}{\left(\frac{df}{ds}\right)^2}\cdot ds + k,$$

c'est-à-dire:

$$s_0 = \frac{\sin f}{\frac{df}{ds}} + \int \cos f(s).ds + k, \tag{8.}$$

k étant une constante arbitraire.

Que l'on suppose d'obtenir, par la résolution de (8.) par rapport à s:

$$s = \varphi(s_0);$$

il résultera alors:

$$\varrho_0 = \left[\frac{2\cos f.\left(\frac{df}{ds}\right)^2 - \sin f\cdot\frac{d^2f}{ds^2}}{\left(\frac{df}{ds}\right)^3}\right]_{s=\varphi(s_0)},$$

c'est-à-dire:

$$(9.)\qquad \frac{1}{\varrho_0} = \frac{d\varphi(s_0)}{ds_0}\cdot\left[\frac{df}{ds}\right]_{s=\varphi(s_0)}.$$

On a donc le théorème: *La courbe enveloppée par une droite mobile qui tourne autour d'un de ses points, avec la vitesse v_r, pendant que le point se meut sur une droite fixe D avec la vitesse v_t, est représentée en coordonnées intrinsèques ϱ_0, s_0 par l'équation* (9.), *$\varphi(s_0)$ étant la fonction que l'on obtient par la résolution de l'équation* (8.) *par rapport à s.*

Dans ces relations s représente la distance entre un point fixe de D et le point où D est rencontrée par la droite mobile, et la fonction $f(s)$ est liée aux vitesses v_r, v_t par la relation:

$$\frac{df(s)}{ds} = \frac{v_r}{v_t}.$$

Pour voir quelle est la position de la droite D par rapport à l'enveloppe $\varDelta_0$ de la droite mobile, on doit remarquer que cette droite, dans le mouvement, vient à coïncider avec D; si l'on suppose $i=0$ et si l'on désigne par s_1 une solution de l'équation:

$$f(s) = 0,$$

l'équation (8.) nous donne:

$$(s_0)_{s=s_1} = \sigma = \left[\frac{\sin f}{\frac{df}{ds}} + \int \cos f(s).ds + k\right]_{s=s_1}.$$

Cette égalité nous offre la valeur σ de l'arc s_0 de la ligne $\varDelta_0$ correspondant à un point dans lequel la tangente coïncide avec la droite fixe D. Il y a autant de ces points particuliers que l'équation $f(s)=0$ a de solutions réelles.

Le théorème que l'on vient de démontrer, peut servir aussi pour la résolution des problèmes dont il s'agit dans cette note.

Exemples. α) Si l'on suppose:

$$\frac{v_r}{v'} = \frac{1}{a},$$

a étant une constante, on aura:

$$f(s) = \frac{s}{a} + b,$$

b étant une constante que l'on peut supposer $=0$, sans perdre de généralité. La relation (8.) nous donne:

$$s_0 = 2a.\sin\left(\frac{s}{a}\right),$$

d'où:

$$s = a.\arcsin\left(\frac{s_0}{2a}\right);$$

et l'équation (9.) devient:

$$\varrho_0 = \sqrt{4a^2 - s_0^2};$$

on reconnaît ici l'équation d'une cycloïde dont le cercle générateur a le rayon $\frac{a}{2}$.

L'équation $f(s) = 0$ a pour solution:

$$s = s_1 = 0,$$

et l'équation qui exprime s_0 nous donne:

$$s_0 = 0.$$

La droite D est donc tangente de la courbe $\varDelta_0$ à l'origine des arcs s_0; mais on reconnaît aisément que cette origine est le sommet de la cycloïde, puisque pour $s_0 = 0$ on a:

$$\varrho_0 = 2a.$$

Donc: ***La ligne enveloppée par une droite tournant autour d'un de ses points, tandis que celui-ci se déplace sur une droite fixe D, avec la condition que le rapport de la vitesse de translation à celle de rotation soit une constante a, est une cycloïde engendrée par un cercle dont le rayon est $\frac{1}{2}a$; la droite D est la tangente au sommet de la ligne.***

Si l'on remarque que:

$$\frac{\varrho}{r} = \cot i = \cot f(s) = \cot\left(\frac{s}{a}\right),$$

on a le théorème: ***La ligne à double courbure à laquelle se réduit la tangente au sommet d'une cycloïde, par une suite de flexions infinitésimales du plan de cette courbe autour de ses tangentes, est caractérisée par la relation $\frac{\varrho}{r} = \cot\left(\frac{s}{a}\right)$.***

β) Si l'on prend:

$$i = f(s) = \arccos\left(\frac{s}{a}\right),$$

la formule (8.) nous donne:

$$s_0 + m = \frac{3s^2}{2a},$$

m étant une constante; on en déduit:

$$s = \sqrt{\tfrac{2}{3}a(s_0 + m)} = \varphi(s_0),$$

et par application de la formule (9.):

$$\rho_0 = -\sqrt{2m(3a-2m)+2(3a-4m)s_0-4s_0^2}.$$

Si l'on suppose $3a-4m=0$, ce qui ne fait pas perdre la généralité, on obtient:

$$s = \sqrt{\frac{2a}{3}\left(s_0+\frac{3a}{4}\right)}; \quad \rho_0 = -\sqrt{\frac{9a^2}{4}-4s_0^2}.$$

On reconnaît d'ici que la ligne $\varDelta_0$ enveloppée par la droite mobile, est une hypocycloïde dans laquelle le cercle fixe et le mobile ont respectivement pour rayon a, $\frac{3a}{2}$.

L'équation $f(s)=0$, qui devient dans ce cas:

$$\arccos\left(\frac{s}{a}\right) = 0,$$

a pour solution:

$$s = s_1 = a,$$

ce qui nous donne:

$$s_0 = \frac{3a}{4} \quad \text{et conséquemment} \quad \rho_0 = 0.$$

La droite D est donc une des tangentes de rebroussement de l'enveloppe. Conséquemment: *La ligne enveloppée par une droite tournant autour d'un de ses points, tandis que celui-ci se déplace sur une droite fixe D, suivant la loi exprimée par l'égalité* $i = \arccos\left(\frac{s}{a}\right)$, *est une hypocycloïde dans laquelle le cercle fixe possède le rayon a et le cercle mobile le rayon* $\frac{3a}{2}$; *la droite D est une des tangentes de rebroussement de l'hypocycloïde.*

Si l'on remarque que dans ce cas on a:

$$\frac{\rho}{r} = \cot i = \frac{s}{\sqrt{a^2-s^2}},$$

on peut énoncer le théorème: *La ligne à double courbure à laquelle se réduit une des tangentes de rebroussement d'une hypocycloïde, dans laquelle le rayon du cercle fixe est a et celui du cercle mobile est* $\frac{3a}{2}$, *par une suite de flexions infinitésimales du plan de cette courbe autour de ses tangentes, est caractérisée par la relation:*

$$\frac{\rho}{r} = \frac{s}{\sqrt{a^2-s^2}}.$$

§ VI.

L'équation (5.) multipliée par ds et intégrée donne:

$$s_0 = k + \int \frac{ds}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2}} + T, \tag{10.}$$

k étant une constante quelconque et T étant donné par la troisième des équations (6.). Supposons que l'on ait déterminé une famille de lignes à double courbure L_0 définies par une relation:

$$\varphi(s_0,\ \varrho_0,\ r_0,\ \varrho_0',\ r_0',\ \ldots) = 0$$

entre l'arc, les rayons de courbure et de torsion et leurs dérivées successives par rapport à l'arc.

Les équations (6.), (10.) nous font connaître une autre famille complète de lignes définies par une autre relation, que l'on obtient aisément de la précédente.

Exemples. Si l'on pose la condition:

$$\frac{r_0}{\varrho_0} = a,$$

a étant une constante, les équations (6.) donnent:

$$a\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}} = \frac{d}{ds}\cdot \operatorname{arctang}\left(\frac{r}{\varrho}\right); \tag{11.}$$

réciproquement cette dernière relation conduit à la première.

Donc: *La relation* (11.) *caractérise les lignes géodésiques d'une surface développable dont l'arête de rebroussement est une hélice quelconque.*

Si l'on suppose que pour la ligne L_0 une équation de la forme (11.) soit verifiée, on aura pour la ligne L:

$$\frac{a\sqrt{r^2\left(\frac{r}{\varrho}\right)'^2+\left\{1+\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2\right\}^3}}{r\left\{1+\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2\right\}} = \frac{d}{ds}\operatorname{arctg}\left\{\frac{r\left(\frac{r}{\varrho}\right)'}{\left[1+\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\},$$

et réciproquement. Donc: *La relation que l'on vient d'écrire caractérise les géodésiques de la surface développable, dont l'arête de rebroussement est une géodésique quelconque d'une autre développable, dont l'arête de rebroussement est une hélice arbitraire.*

Posons la condition:

$$\frac{\varrho_0}{r_0} = \frac{s_0}{a},$$

a étant une constante; le procédé que l'on vient d'exposer nous donne pour la ligne L:

$$\left(a \cdot \frac{1+\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2}{r} - \frac{r}{\varrho}\right) \frac{\sqrt{1+\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2}}{\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{\varrho}\right)} = \int \frac{ds}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2}} + \text{const.}$$

Donc: ***La relation que l'on vient d'écrire caractérise les lignes géodésiques d'une surface développable, dont l'arête de rebroussement est une ligne géodésique d'un cône quelconque.***

Ces exemples suffisent pour démontrer que, dans certains cas, on peut déterminer des familles de lignes caractérisées par une relation entre les rayons de courbure et de torsion et leurs dérivées par rapport à l'arc.

§ VII.

Les relations que l'on a déterminées au § VI sont vérifiées pour toutes les géodésiques de certaines surfaces développables. Mais il peut arriver qu'une relation particulière ne soit vérifiée que pour certaines géodésiques d'une développable; cela a lieu, par exemple, en plusieurs cas considérés aux §§ II, IV, V. On peut alors se proposer de déterminer la relation plus générale qui caractérise toute autre géodésique de la même surface développable.

Soit L une géodésique de la développable Σ, caractérisée par la relation

$$\frac{\varrho}{r} = f(s),$$

et soit L_1 une autre géodésique quelconque de Σ; désignons par s_1, ϱ_1, r_1, i_1 l'arc, les rayons de courbure et de torsion de L_1 et l'inclinaison de cette ligne sur les génératrices rectilignes de Σ. Si α est l'angle formé par les géodésiques L_1, L, on a:

$$\cot i = \cot(i_1 - \alpha) = \frac{\cot i_1 \cot \alpha + 1}{\cot \alpha - \cot i_1}$$

et conséquemment:

$$(12.)\qquad \frac{\varrho}{r} = \frac{\sin\alpha + \frac{\varrho_1}{r_1}\cos\alpha}{\cos\alpha - \frac{\varrho_1}{r_1}\sin\alpha}.$$

Allons déterminer la relation entre s_1 et s. Que l'on déroule la surface Σ sur un plan et que l'on prenne deux systèmes d'axes de coordonnées $o(x, y)$, $o_1(x_1, y_1)$ choisis, par rapport aux lignes L, L_1, de la manière que l'on a indiquée au § I.

Entre les coordonnées x, y et les autres x_1, y_1 d'un point quelconque de la ligne plane $\mathcal{A}_0$, à laquelle se réduit l'arête de rebroussement de Σ, ont lieu les égalités:

$$x_1 = m + x\cos\alpha - y\sin\alpha,\quad y_1 = n + x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

m, n étant les coordonnées de o_1 (origine des arcs s_1 de L_1) par rapport au système $o(x, y)$. Par conséquent:

$$s_1 = \frac{x_1 dy_1 - y_1 dx_1}{dy_1} = \frac{s + (m\sin\alpha - n\cos\alpha)\frac{dx}{dy} + (m\cos\alpha + n\sin\alpha)}{\frac{dx}{dy}\sin\alpha + \cos\alpha};$$

et si l'on se rappelle que:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\varrho}{r} = \varphi(s),$$

il vient:

$$(13.)\qquad s_1 = \frac{m\cos\alpha + n\sin\alpha + s + (m\sin\alpha - n\cos\alpha)\varphi(s)}{\cos\alpha + \varphi(s).\sin\alpha}.$$

Si la résolution de cette équation par rapport à s nous donne:

$$s = f(s_1),$$

l'équation (12.) devient:

$$\varphi[f(s_1)] = \frac{\sin\alpha + \frac{\varrho_1}{r_1}\cos\alpha}{\cos\alpha - \frac{\varrho_1}{r_1}\sin\alpha},$$

d'où l'on dérive:

$$(14.)\qquad \frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{\varphi[f(s_1)]\cos\alpha - \sin\alpha}{\varphi[f(s_1)]\sin\alpha + \cos\alpha}.$$

On a donc le théorème: *Si, relativement à une ligne à double courbure L,*

une relation $\frac{\varrho}{r} = \varphi(s)$ *est vérifiée, pour toute autre géodésique* L_1 *de la surface développable rectifiante de* L *sera vérifiée l'autre relation* (14.), $f(s_1)$ *étant la fonction de* s_1 *que l'on obtient en résolvant par rapport à* s *l'équation* (13.).

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $m = n = 0$, les équations (13.), (14.) deviennent:

$$(13'.) \qquad s_1 = \frac{s}{\varphi(s)}; \qquad (14'.) \quad \varphi[f(s_1)] = -\frac{r_1}{\varrho_1}.$$

Exemples. Si l'on suppose:

$$\frac{\varrho}{r} = \varphi(s) = \frac{a}{s},$$

le théorème que l'on vient de démontrer, et les formules (13'.), (14'.) nous donneront:

$$\frac{\varrho_1}{r_1} = -\sqrt{\frac{s_1}{a}}.$$

Cela est bien naturel, d'après ce que nous avons obtenu aux deux premiers cas du § II.

Si $\frac{\varrho}{r} = \varphi(s) = \left(\frac{s}{a}\right)^2$, on a:

$$\frac{\varrho_1}{r_1} = -\left(\frac{s_1}{a}\right)^2,$$

relation qui est de la même forme que celle d'où nous sommes parti. Cela s'explique aisément, en se rappelant ce que l'on a obtenu au § II.

Lorsque $\frac{\varrho}{r} = \frac{a}{s}$, la relation (13.) nous fournit:

$$s = f(s_1)$$
$$= \tfrac{1}{2}\{(s_1-m)\cos\alpha - n\sin\alpha \pm \sqrt{[(s_1-m)\cos\alpha - n\sin\alpha]^2 + 4a[(s_1-m)\sin\alpha + n\cos\alpha]}\}$$

et la relation (14.):

$$(15.) \quad \frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{2a\cos\alpha - \{(s_1-m)\cos\alpha - n\sin\alpha \pm \sqrt{[(s_1-m)\cos\alpha - n\sin\alpha]^2 + 4a[(s_1-m)\sin\alpha + n\cos\alpha]}\}\sin\alpha}{2a\sin\alpha + \{(s_1-m)\cos\alpha - n\sin\alpha \pm \sqrt{[(s_1-m)\cos\alpha - n\sin\alpha]^2 + 4a[(s_1-m)\sin\alpha + n\cos\alpha]}\}\cos\alpha}$$

Pareillement, si $\frac{\varrho}{r} = \left(\frac{s}{a}\right)^2$, l'équation (13.) donne:

$$s = f(s_1) = \frac{a^2 \pm a\sqrt{a^2 - 4\{(s_1-m)\sin\alpha + n\cos\alpha\}\{(s_1-m)\cos\alpha - n\sin\alpha\}}}{2\{(s_1-m)\sin\alpha + n\cos\alpha\}}$$

et l'équation (14.):

$$(16.) \quad \frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{\{a \pm \sqrt{a^2 - 4[(s_1-m)\sin\alpha + n\cos\alpha][(s_1-m)\cos\alpha - n\sin\alpha]}\}^2\cos\alpha - 4\{(s_1-m)\sin\alpha + n\cos\alpha\}^2\sin\alpha}{\{a \pm \sqrt{a^2 - 4[(s_1-m)\sin\alpha + n\cos\alpha][(s_1-m)\cos\alpha - n\sin\alpha]}\}^2\sin\alpha + 4\{(s_1-m)\sin\alpha + n\cos\alpha\}^2\cos\alpha}$$

On a donc le théorème: ***La ligne à double courbure à laquelle se réduit une droite quelconque placée sur le plan d'une parabole ou d'une hyperbole équilatère, moyennant une suite de flexions infinitésimales du plan de ces coniques autour de leurs tangentes, est caractérisée respectivement par les relations*** (15.), (16.).

§ VIII.

Soient $L(\varrho, r)$, $L_1(\varrho_1, r_1)$ deux lignes géodésiques parallèles d'une même surface développable Σ, i l'inclinaison de ces lignes sur les génératrices rectilignes et k leur distance géodésique constante. Si A et A_1 sont deux points correspondants des lignes L et L_1, on a:

$$AA_1 = \frac{k}{\sin i};$$

par conséquent, si l'on désigne par $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $(\cos l, \cos m, \cos n)$ les cosinus directeurs de la tangente et de la binormale de L, et si l'on remarque que $\cot i = \frac{\varrho}{r}$, les coordonnées x_1, y_1, z_1 de A_1 sont liées aux coordonnées x, y, z de A par les relations:

$$x_1 = x + k\left(\cos l + \frac{\varrho}{r}\cos\alpha\right), \quad \text{etc.}$$

Soit S la développable osculatrice de L, S_1 une développable parallèle à S, $\varLambda$ la ligne de S_1 qui correspond à la ligne L de S et $\varLambda_1$ (ϱ_1, r_1) l'arête de rebroussement de S_1.

Si l'on remarque que les coordonnées d'un point quelconque de $\varLambda$ sont:

$$\xi = x + k\cos l, \quad \eta = y + k\cos m, \quad \zeta = z + k\cos n,$$

k étant la distance constante entre les surfaces parallèles S, S_1, on trouve que les coordonnées d'un point quelconque de la surface S_1 sont exprimées par les formules:

$$X = \xi + v\cos\alpha = x + k\cos l + v\cos\alpha, \quad \text{etc.}$$

v étant les distances comptées sur les génératrices de S_1 à partir de $\varLambda$. Au moyen de ces formules, et par un calcul bien connu, on trouve

$$-k\frac{\varrho}{r}$$

pour expression de la distance entre les couples de points correspondants des deux lignes $\varLambda$ et $\varLambda_1$; conséquemment les coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1 d'un

point quelconque de $\varDelta_1$ sont exprimées de la manière suivante:

$$\xi_1 = x+k\left(\cos l - \frac{\varrho}{r}\cos\alpha\right) \quad \text{etc.}$$

Ces formules nous apprennent que les lignes L_1, $\varDelta_1$ coïncident.

On a donc le théorème: *Si l'on construit une suite de développables parallèles à une développable donnée S:*

1°. *les arêtes de rebroussement de ces surfaces sont placées sur une même surface développable Σ;*

2°. *ces arêtes de rebroussement forment, sur la développable Σ, une suite de géodésiques parallèles;*

3°. *la distance géodésique entre deux de ces lignes est égale à la distance entre les deux développables parallèles correspondantes;*

4°. *la surface Σ est la développable rectifiante de l'arête de rebroussement de S.*

Les équations (7.) peuvent s'appliquer à la détermination du rayon de courbure ϱ_1 et du rayon de torsion r_1 de L_1, au moyen des quantités analogues relatives à la ligne L.

En effet, dans ce cas nous avons:

$$(17.) \qquad \frac{r}{\varrho} = \frac{r_1}{\varrho_1};$$

si donc on désigne par θ le rapport $\frac{r}{\varrho}$ et par θ_1 l'autre rapport $\frac{r_1}{\varrho_1}$, les équations (7.) nous donnent:

$$\frac{2\theta_1'^2-\theta_1\theta_1''}{\theta_1'^3} = \frac{2\theta'^2-\theta\theta''}{\theta'^3}; \quad \frac{r_1(2\theta_1'^2-\theta_1\theta_1'')}{\theta_1'^2} = \frac{r(2\theta'^2-\theta\theta'')}{\theta'^2};$$

d'où l'on dérive:

$$(18.) \qquad r_1\frac{d\theta_1}{ds_1} = r\frac{d\theta}{ds}.$$

La relation entre l'arc s_1 de L_1 et l'arc s de L est donnée par l'équation (13.), pourvu que l'on y fasse:

$$m = 0, \quad n = k, \quad \alpha = 0, \quad f(s) = \frac{\varrho}{r}.$$

On a donc:

$$s_1 = s - k\frac{\varrho}{r};$$

et si l'on fait usage de cette égalité, les équations (17.), (18.) nous donnent ϱ_1 et r_1.

Il subsiste donc le théorème: *L'arête de rebroussement L_1 de la développable S_1 parallèle à une développable quelconque S dont l'arête de*

rebroussement est L, est une géodésique de la développable rectifiante de L; les lignes L et L_1 sont géodésiquement parallèles, et la distance géodésique constante entre ces lignes est égale à la distance des surfaces parallèles S, S_1. Les formules qui lient les éléments géométriques de L_1 aux éléments de L sont les suivantes:

$$(19.)\quad \varrho_1 = \varrho\left\{1-k\frac{d}{ds}\left(\frac{\varrho}{r}\right)\right\};\quad r_1 = r\left\{1-k\frac{d}{ds}\left(\frac{\varrho}{r}\right)\right\};\quad s_1 = s-k\frac{\varrho}{r}.$$

Ces formules servent à la détermination de la ligne L_1 aussitôt que l'on connaît la ligne L.

Application. La ligne L_1 est égale à L lorsque:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\varrho}{r}\right) = 0;$$

cette condition équivaut à l'autre:

$$\frac{\varrho}{r} = \text{constante.}$$

La ligne L_1 est semblable à L lorsque:

$$1-k\frac{d}{ds}\left(\frac{\varrho}{r}\right) = a,$$

a étant une constante; on a d'ici:

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{1-a}{k}s+\text{const.},$$

ce qui démontre que L est une géodésique d'un cône.

Donc: *Celles d'entre les surfaces développables dont l'arête de rebroussement est une hélice cylindrique ou une géodésique d'un cône, sont caractérisées par la propriété que les arêtes de rebroussement des surfaces développables parallèles sont des lignes respectivement égales ou semblables.*

On peut encore énoncer la propriété suivante: *Le cylindre et le cône sont les surfaces développables caractérisées par la propriété que les géodésiques parallèles sont des lignes égales ou semblables.*

Les formules (19.) supposent que la ligne L ne soit pas un point; on doit donc considérer à part ce cas exceptionnel.

Si L se réduit à un point à l'infini, la surface S est un cylindre et la surface S_1 l'est aussi; les sections droites de ces cylindres sont deux lignes planes parallèles.

Soit S un cône dont le sommet est à l'origine des axes de coordonnées; si l'on désigne par ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$), ($\cos l$, $\cos m$, $\cos n$), ($\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$)

les cosinus directeurs des génératrices rectilignes, des normales à la surface du cône et des droites perpendiculaires aux plans déterminés par les couples des droites précédentes, la ligne L_1 est représentée par les équations:

$$x_1 = k\left\{\cos l - \left(\frac{\varrho}{r}\right)_0 \cos\alpha\right\} \quad \text{etc.,}$$

$\left(\frac{\varrho}{r}\right)_0$ étant ce que devient le rapport $\frac{\varrho}{r}$, relatif à la ligne L, lorsque cette ligne se réduit à un point.

Que l'on coupe le cône S par une sphère de rayon 1 dont le centre est au sommet, et soit $\varLambda$ la ligne sphérique que l'on obtient. L'angle infinitésimal de deux génératrices du cône est mesuré par l'arc infinitésimal $d\sigma$ de $\varLambda$, et l'angle infinitésimal de deux plans tangents consécutifs de la surface conique est mesuré par l'angle de contingence géodésique $\frac{d\sigma}{R_g}$ de $\varLambda$. On a donc:

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)_0 = \frac{1}{R_g}.$$

Les formules précédentes deviennent alors:

$$x_1 = k\left(\cos l - \frac{1}{R_g}\cdot\cos\alpha\right) \quad \text{etc.,}$$

et si l'on remarque que:

$$\frac{d\cos\alpha}{d\sigma} = \cos\lambda; \quad \frac{d\cos l}{d\sigma} = \frac{\cos\lambda}{R_g} \quad \text{etc.,}$$

on aura:

$$\frac{ds_1}{d\sigma} = -k\left(\frac{1}{R_g}\right)',$$

relation qui, par application des formules:

$$\frac{ds_1}{\varrho_1} = d\sigma, \quad \frac{ds_1}{r_1} = \frac{d\sigma}{R_g},$$

donne:

$$(20.)\quad \varrho_1 = -k\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R_g}\right); \quad r_1 = -kR_g\cdot\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R_g}\right); \quad ds_1 = -k\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{R_g}\right)d\sigma.$$

Donc: *Pour l'arête de rebroussement de la développable parallèle à un cône non circulaire ont lieu les formules* (20.), σ *et* R_g *étant l'arc et le rayon de courbure géodésique de la ligne* $\varLambda$ *que l'on obtient en coupant le cône par une sphère de rayon* 1 *dont le centre est au sommet.*

Les équations (20.) sont celles que l'on doit mettre à la place des relations (19.), lorsque la ligne L se réduit à un point.

Si S est un cône circulaire, R_g est constant et les formules (20.) nous donnent:

$$s_1 = \varrho_1 = r_1 = 0;$$

cela est bien naturel, puisque dans ce cas la surface parallèle au cône est un autre cône circulaire.

Si dans les équations:

$$x_1 = k\left(\cos l - \frac{1}{R_g}\cos\alpha\right) \quad \text{etc.}$$

on suppose que k soit une variable indépendante de σ, on obtient les coordonnées d'un point quelconque d'une certaine surface s, pour laquelle on a:

$$E = \Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial\sigma}\right)^2 = k^2\left(\frac{1}{R_g}\right)'^2; \quad F = \Sigma\frac{\partial x_1}{\partial\sigma}\frac{\partial x_1}{\partial k} = \frac{k}{R_g}\left(\frac{1}{R_g}\right)'; \quad G = \Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial k}\right)^2 = 1+\left(\frac{1}{R_g}\right)^2.$$

Si l'on désigne par ϱ_k le rayon de courbure géodésique des lignes $k =$ const. et par ϱ_t celui des lignes $t =$ const., trajectoires orthogonales des $k =$ const., on a:

$$\frac{1}{\varrho_k} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial k} - \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right)\right\} = 0,$$

$$\frac{1}{\varrho_t} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}\right) = 0.$$

La surface s contient donc deux systèmes de géodésiques orthogonales, et conséquemment elle est développable.

Si l'on remarque que les cosinus directeurs $\cos\alpha_\sigma$, $\cos\beta_\sigma$, $\cos\gamma_\sigma$ de la tangente à la ligne $\sigma =$ const. sont donnés par les égalités:

$$\cos\alpha_\sigma = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x_1}{\partial k} = \frac{\cos l - \frac{1}{R_g}\cos\alpha}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{R_g}\right)^2}} \quad \text{etc.,}$$

on déduit que, sur la surface s, les lignes $\sigma =$ const. sont les génératrices rectilignes; et puisqu'il résulte:

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0,$$

lorsque la variable k reçoit la valeur 0, la surface s est un cône dont le sommet est à l'origine des axes.

Les lignes $k =$ const. sont donc des géodésiques parallèles d'une

surface conique; les formules (20.) nous donnent en effet:

$$\frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{a-s_1}{k},$$

a étant une constante arbitraire; c'est, comme l'on sait, la relation caractéristique de la géodésique d'un cône.

Nous nous proposons de déterminer la position réciproque du cône donné C et du cône C_1, lieu des lignes $k = \text{const.}$

Que l'on coupe ces cônes par une sphère de rayon 1 dont le centre est au sommet des cônes; soient Λ et Λ_1 les lignes sphériques obtenues.

La relation:

$$\Sigma \cos\alpha_0 \cos\lambda = 0,$$

que l'on peut dériver des égalités précédentes, nous apprend que les génératrices du cône C_1 sont dans les plans normaux de la ligne sphérique Λ. Si l'on désigne par ε l'angle formé par les génératrices correspondantes des cônes C, C_1, on a:

$$\cos\varepsilon = \Sigma\cos\alpha_0\cos\alpha = -\frac{\frac{1}{R_g}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{R_g}\right)^2}},$$

d'où:

$$\operatorname{tang}\varepsilon = -R_g.$$

Cette égalité démontre que la ligne Λ_1 est la développée sphérique de Λ.

On a donc le théorème général suivant: *Si l'on construit une suite de développables parallèles à un cône donné C:*

1°. *les arêtes de rebroussement de ces développables sont sur un autre cône C_1 dont le sommet est au sommet du cône C;*

2°. *ces arêtes de rebroussement sont des lignes géodésiques parallèles du cône C_1;*

3°. *la ligne, suivant laquelle le cône C est coupé par une sphère dont le centre est au sommet, est la développée sphérique de la ligne, suivant laquelle le cône C_1 est coupé par la même sphère.*

$$(1.)\quad\begin{cases} F_1\left(z_1,\ldots,z_\mu,u_1,\ldots,u_m,\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1},\ldots,\dfrac{\partial u_m}{\partial z_1},\ldots,\dfrac{\partial^\lambda u_a}{\partial z_1^{\lambda_1}\partial z_2^{\lambda_2}\ldots\partial z_\mu^{\lambda_\mu}},\ldots\right)=0,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ F_m\left(z_1,\ldots,z_\mu,u_1,\ldots,u_m,\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1},\ldots,\dfrac{\partial u_m}{\partial z_1},\ldots,\dfrac{\partial^\nu u_a}{\partial z_1^{\nu_1}\partial z_2^{\nu_2}\ldots\partial z_\mu^{\nu_\mu}},\ldots\right)=0\end{cases}$$

gebracht, und sind $F_1, F_2, \ldots, F_m$ ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen, so nennt man dieses System ein ***algebraisches partielles Differentialgleichungsystem.***

Man sieht leicht, dass man durch Vermehrung der abhängigen Variabeln, also auch der Anzahl der Gleichungen des Systems die Ordnung der partiellen Differentialquotienten der abhängigen Veränderlichen erniedrigen kann; denn greift man eine dieser Variabeln u_a heraus, und sei die höchste Ordnung der in dem Systeme vorkommenden partiellen Differentialquotienten von u_a die $k$te, so führe man für *alle* partiellen Differentialquotienten $(k-1)$ter Ordnung von u_a neue abhängige Variable $v_1, v_2, \ldots$ ein, und man wird wieder ein simultanes partielles Differentialgleichungsystem erhalten, und zwar mit mehr abhängigen Variabeln, von denen jedoch die neu substituirten nur partielle Differentialquotienten erster Ordnung einführen, während die partiellen Differentialquotienten von u_a sich bis zur $(k-1)$ten Ordnung erheben. Substituirt man nun für die partiellen Differentialquotienten $(k-2)$ter Ordnung von u_a wieder neue Variable, u. s. f., und führt eben diese Reduction der Reihe nach für alle abhängigen Variabeln durch, so ergiebt sich ein simultanes partielles Differentialgleichungsystem, welches für keine der abhängigen Variabeln partielle Differentialquotienten von höherer Ordnung als der ersten enthalten wird, und es folgt somit, ***dass jedes simultane partielle Differentialgleichungsystem durch Einführung neuer abhängiger Variabeln in ein anderes verwandelt werden kann, welches nur partielle Differentialquotienten erster Ordnung enthält, und das wir ein partielles Differentialgleichungsystem erster Ordnung nennen wollen.***

Sei nun ein partielles Differentialgleichungsystem erster Ordnung vorgelegt

$$(2.)\quad\begin{cases} F_1\left(z_1,\ldots,z_\mu,u_1,\ldots,u_m,\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1},\ldots,\dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu},\ldots,\dfrac{\partial u_m}{\partial z_1},\ldots,\dfrac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\right)=0,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ F_m\left(z_1,\ldots,z_\mu,u_1,\ldots,u_m,\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1},\ldots,\dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu},\ldots,\dfrac{\partial u_m}{\partial z_1},\ldots,\dfrac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\right)=0,\end{cases}$$

worin $F_1, \ldots, F_m$ ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, und werde angenommen, dass von den Functionaldeterminanten

und t_α der Reihe nach die N Lösungen der in bekannter Weise stets herstellbaren Gleichung Nten Grades

$$(7.)\quad G\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, t\right) = 0$$

darstellt, wobei $G_1, \ldots, G_m$ als ganze Functionen $(N-1)$ten Grades in Bezug auf t_α betrachtet werden dürfen. Zerlegt man ferner das Polynom der Gleichung (7.) in seine mit Adjungirung der Grössen

$$(\alpha.)\quad z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}$$

algebraisch irreductibeln Factoren

$$(8.)\quad \begin{cases} G\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, t\right) \\ = g_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, t\right)\ldots \\ \ldots g_\sigma\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, t\right), \end{cases}$$

so kann man das vorgelegte partielle Differentialgleichungsystem durch die N dem gegebenen völlig äquivalenten Systeme

$$(9.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial g_\lambda\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, t_{\lambda\varrho}\right)}{\partial t_{\lambda\varrho}} \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} \\ \qquad = g_{\lambda 1}\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, t_{\lambda\varrho}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial g_\lambda\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, t_{\lambda\varrho}\right)}{\partial t_{\lambda\varrho}} \dfrac{\partial u_m}{\partial z_1} \\ \qquad = g_{\lambda m}\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, t_{\lambda\varrho}\right) \end{cases}$$

ersetzen, in welchem $g_\lambda, g_{\lambda 1}, \ldots, g_{\lambda m}$ ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, λ die Werthe $1, 2, \ldots, \sigma$ annimmt und $t_{\lambda\varrho}$ der Reihe nach alle Lösungen der in t mit Adjungirung der Grössen $(\alpha.)$ irreductibeln Gleichung

$$(10.)\quad g_\lambda\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, t\right) = 0$$

darstellt.

Wir werden die Form (6.) die *Weierstrass*sche *Normalform* der partiellen Differentialgleichungssysteme und das System nach der Zahl *m* der abhängigen Variabeln ein *partielles Differentialgleichungsystem m ter Klasse* nennen.

2. Definition und Existenzbeweis der Integrale von partiellen Differentialgleichungssystemen beliebiger Klasse.

Ist ein beliebiges partielles Differentialgleichungssystem erster Ordnung und mter Klasse vorgelegt

$$(11.)\quad \begin{cases} F_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\right) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\right) = 0, \end{cases}$$

in welchem $F_1, \ldots, F_m$ beliebige Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, und seien für einen Werth $z_1 = a_1$ die Werthe von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ als willkürliche, aber bestimmte Functionen von $z_2, z_3, \ldots, z_\mu$ in der Form

$$(12.)\quad \begin{cases} (u_1)_{a_1} = \varphi_1(z_2, z_3, \ldots, z_\mu), \quad (u_2)_{a_1} = \varphi_2(z_2, z_3, \ldots, z_\mu), \quad \ldots, \\ \qquad (u_m)_{a_1} = \varphi_m(z_2, z_3, \ldots, z_\mu) \end{cases}$$

gegeben, so soll gezeigt werden, dass, wenn $a_2, a_3, \ldots, a_\mu$ irgend ein Werthesystem von $z_2, z_3, \ldots, z_\mu$ bedeutet, von der Eigenschaft, dass

1) ***die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ in der Umgebung dieses Werthesystems nach ganzen, positiven, steigenden Potenzen von***

$$z_2 - a_2, \quad z_3 - a_3, \quad \ldots, \quad z_\mu - a_\mu$$

entwickelbar sind,

2) ***die linken Seiten der partiellen Differentialgleichungen*** (11.) ***in der Umgebung der Anfangswerthe***

$$(13.)\quad \begin{cases} z_1 = a_1, \quad z_2 = a_2, \quad \ldots, \quad z_\mu = a_\mu, \\ (u_1)_{a_1,\ldots,a_\mu} = \varphi_1(a_2, \ldots, a_\mu) = b_1, \ \ldots, \ (u_m)_{a_1,\ldots,a_\mu} = \varphi_m(a_2, \ldots, a_\mu) = b_m, \\ \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial z_2}\right)_{a_1,\ldots,a_\mu} = \left(\dfrac{\partial \varphi_1(z_2, \ldots, z_\mu)}{\partial z_2}\right)_{a_1,\ldots,a_\mu} = b_{12}, \ \ldots, \\ \qquad \left(\dfrac{\partial u_m}{\partial z_2}\right)_{a_1,\ldots,a_\mu} = \left(\dfrac{\partial \varphi_m(z_2, \ldots, z_\mu)}{\partial z_2}\right)_{a_1,\ldots,a_\mu} = b_{m2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu}\right)_{a_1,\ldots,a_\mu} = \left(\dfrac{\partial \varphi_1(z_2, \ldots, z_\mu)}{\partial z_\mu}\right)_{a_1,\ldots,a_\mu} = b_{1\mu}, \ \ldots, \\ \qquad \left(\dfrac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\right)_{a_1,\ldots,a_\mu} = \left(\dfrac{\partial \varphi_m(z_2, \ldots, z_\mu)}{\partial z_\mu}\right)_{a_1,\ldots,a_\mu} = b_{m\mu} \end{cases}$$

und eines die Gleichungen

$$(14.)\quad \begin{cases} F_1\left(a_1, \ldots, a_\mu, b_1, \ldots, b_m, \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}\right), b_{12}, \ldots, b_{1\mu}, \ldots, \left(\dfrac{\partial u_m}{\partial z_1}\right), b_{m2}, \ldots, b_{m\mu}\right) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m\left(a_1, \ldots, a_\mu, b_1, \ldots, b_m, \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}\right), b_{12}, \ldots, b_{1\mu}, \ldots, \left(\dfrac{\partial u_m}{\partial z_1}\right), b_{m2}, \ldots, b_{m\mu}\right) = 0 \end{cases}$$

befriedigenden endlichen Werthesystems

$$(15.)\quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)_{a_1,\dots,a_\mu} = b_{11},\quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial z_1}\right)_{a_1,\dots,a_\mu} = b_{21},\quad \dots,\quad \left(\frac{\partial u_m}{\partial z_1}\right)_{a_1,\dots,a_\mu} = b_{m1}$$

nach ganzen, positiven, steigenden Potenzen von

$$z_1-a_1,\ \dots,\ z_\mu-a_\mu,\quad u_1-b_1,\ \dots,\ u_m-b_m,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-b_{11},\ \dots,\ \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}-b_{1\mu},\ \dots,\ \frac{\partial u_m}{\partial z_1}-b_{m1},\ \dots,\ \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}-b_{m\mu}$$

entwickelbar sind, endlich

3) *die Functionaldeterminante*

$$(16.)\quad D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_1}}, & \dfrac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_1}}, & \dots, & \dfrac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_1}} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_1}}, & \dfrac{\partial F_2}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_1}}, & \dots, & \dfrac{\partial F_2}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_1}}, & \dfrac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_1}}, & \dots, & \dfrac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_1}} \end{vmatrix}$$

für die Anfangswerthe (13.) *und* (15.) *von Null verschieden ist,*

die partiellen Differentialgleichungen (11.) *ein Integralsystem* $u_1, u_2, \dots, u_m$ *besitzen, welches in der Umgebung von* $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$, $\dots$, $z_\mu = a_\mu$ *nach ganzen, positiven, steigenden Potenzen von* z_1-a_1, z_2-a_2, $\dots$, $z_\mu-a_\mu$ *fortschreitende Entwickelungen, also den Charakter ganzer Functionen besitzt und für* $z_1 = a_1$ *die willkürlich festgesetzten Functionalwerthe* (12.) *aller übrigen Variabeln annimmt.*

Ist das partielle Differentialgleichungsystem (11.) *ein algebraisches, so sagen die angegebenen Bedingungen für das dann immer herstellbare Weierstrass'sche Normalsystem aus, dass die Gleichung* (7.) *für die Anfangswerthe*

$$a_1,\ \dots,\ a_\mu,\quad b_1,\ \dots,\ b_m,\quad b_{12},\ \dots,\ b_{m2},\quad \dots,\quad b_{1\mu},\ \dots,\ b_{m\mu}$$

eine endliche und einfache Lösung τ_1 *für* t *liefert.*

Zunächst ist aus der Bedingung 3) des eben ausgesprochenen Satzes unmittelbar ersichtlich*), dass $\frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial u_m}{\partial z_1}$ in der Umgebung der An-

*) Nach dem bekannten Satze, dass, wenn in n Gleichungen

$$F_1(v_1, v_2, \dots, v_\nu, w_1, w_2, \dots, w_n) = 0,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$F_n(v_1, v_2, \dots, v_\nu, w_1, w_2, \dots, w_n) = 0$$

und neue abhängige Variable durch die Beziehungen

$$(19.)\quad \begin{cases} u_1 - b_1 = U_1 + b_{12} Z_2 + \cdots + b_{1\mu} Z_\mu, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ u_m - b_m = U_m + b_{m2} Z_2 + \cdots + b_{m\mu} Z_\mu \end{cases}$$

ein, und es ist dann unmittelbar ersichtlich, dass einerseits der Werthereihe (13.) für die neuen Variabeln und deren Ableitungen die Nullwerthe aller dieser Grössen entsprechen, andererseits das Differentialgleichungssystem (17.) die Form annehmen wird

$$(20.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial Z_1} = R_1\Big(Z_1, \ldots, Z_\mu, U_1, \ldots, U_m, \dfrac{\partial U_1}{\partial Z_2}, \ldots, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial U_1}{\partial Z_\mu}, \ldots, \dfrac{\partial U_m}{\partial Z_2}, \ldots, \dfrac{\partial U_m}{\partial Z_\mu}\Big), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\partial U_m}{\partial Z_1} = R_m\Big(Z_1, \ldots, Z_\mu, U_1, \ldots, U_m, \dfrac{\partial U_1}{\partial Z_2}, \ldots, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial U_1}{\partial Z_\mu}, \ldots, \dfrac{\partial U_m}{\partial Z_2}, \ldots, \dfrac{\partial U_m}{\partial Z_\mu}\Big), \end{cases}$$

worin $R_1, \ldots, R_m$ *Maclaurin*sche Reihen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, welche innerhalb bestimmter, um die Nullpunkte der entsprechenden Grössen gelegter Kreise convergiren, und es wäre zu zeigen, dass stets *ein* und *nur ein* Integralsystem des partiellen Differentialgleichungssystems (20.) existirt, dessen Elemente nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\mu$ entwickelbar sind und für $Z_1 = 0$ die Werthe

$$(21.)\quad \begin{cases} (U_1)_{Z_1=0} = \varphi_1 - b_1 - b_{12} Z_2 - \cdots - b_{1\mu} Z_\mu = \Phi_1(Z_2, Z_3, \ldots, Z_\mu), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ (U_m)_{Z_1=0} = \varphi_m - b_m - b_{m2} Z_2 - \cdots - b_{m\mu} Z_\mu = \Phi_m(Z_2, Z_3, \ldots, Z_\mu) \end{cases}$$

---

wird, wenn wir in der ersten Gleichung w_1 als Function von $w_2, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_\nu$ betrachten, $w_1 - w_1^0$ sich nach positiven, ganzen, steigenden Potenzen von $w_2 - w_2^0, \ldots, w_n - w_n^0, v_1 - v_1^0, \ldots, v_\nu - v_\nu^0$ entwickeln lassen, wenn $\left(\frac{\partial F_1}{\partial w_1}\right)_0$, welches Zeichen den Werth dieser Ableitung für die Anfangswerthe aller Variabeln genommen bedeutet, von Null verschieden ist — und die Existenz einer solchen Entwickelung lässt sich unmittelbar aus dem Charakter der Gleichung herleiten, wie ich in meinem Lehrbuche der Theorie der Differentialgleichungen S. 20 gezeigt habe. Setzt man die so erhaltene Entwickelung in die $n-1$ folgenden Gleichungen ein, so behalten dieselben den Charakter von ganzen Functionen, und, wenn wir die zweite Gleichung als Function vom Charakter einer ganzen in Bezug auf $w_2, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_\nu$ in der Umgebung von $w_2^0, \ldots, w_n^0, v_1^0, \ldots, v_\nu^0$ mit $(F_2) = 0$ bezeichnen, so wird sich wiederum $w_2 - w_2^0$ nach positiven,

annehmen, worin die Functionen $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ weder constante, noch in $Z_2, Z_3, \ldots, Z_\mu$ lineare Glieder besitzen.

Nimmt man endlich zwei Grössen r und ϱ an, welche beide kleiner als sämmtliche Convergenzradien der Reihen $R_1, \ldots, R_m$ und der Potenzreihen $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ sind und zugleich so beschaffen, dass auch $\frac{r}{\varrho}$ unter dem kleinsten dieser Convergenzradien liegt, und setzt

$$(22.)\quad Z_1 = \varrho x_1,\; Z_2 = \varrho x_2,\; \ldots,\; Z_\mu = \varrho x_\mu,\; U_1 = r y_1,\; U_2 = r y_2,\; \ldots,\; U_m = r y_m,$$

so dass

$$(23.)\quad \begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial Z_1} = \frac{r}{\varrho}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial U_1}{\partial Z_\mu} = \frac{r}{\varrho}\frac{\partial y_1}{\partial x_\mu}, \quad \ldots, \\ \qquad \frac{\partial U_m}{\partial Z_1} = \frac{r}{\varrho}\frac{\partial y_m}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial U_m}{\partial Z_\mu} = \frac{r}{\varrho}\frac{\partial y_m}{\partial x_\mu} \end{cases}$$

wird, *so geht das Differentialgleichungsystem* (20.) *in ein ähnliches von der Form*

$$(24.)\quad \begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = g_1\left(x_1, \ldots, x_\mu, y_1, \ldots, y_m, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y_1}{\partial x_\mu}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial x_\mu}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} = g_m\left(x_1, \ldots, x_\mu, y_1, \ldots, y_m, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y_1}{\partial x_\mu}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial x_\mu}\right) \end{cases}$$

über, worin $g_1, \ldots, g_m$ wiederum Maclaurinsche Reihen bedeuten, welche vermöge der Annahme für ϱ und r jedenfalls Convergenzkreise besitzen, deren Radien grösser als die Einheit sind, und es kommt darauf an, nachzuweisen,

ganzen, steigenden Potenzen von $w_3 - w_3^0, \ldots, w_n - w_n^0, v_1 - v_1^0, \ldots, v_\nu - v_\nu^0$ entwickeln lassen, wenn $\left(\frac{\partial (F_2)}{\partial w_2}\right)_0$ von Null verschieden ist; fährt man in diesen Schlüssen fort, so sieht man, dass sich schliesslich $w_n - w_n^0$ nach positiven, ganzen, steigenden Potenzen von $v_1 - v_1^0, \ldots, v_\nu - v_\nu^0$ wird entwickeln lassen, wenn $\left(\frac{\partial (F_n)}{\partial w_n}\right)_0$ von Null verschieden ist, worin (F_n) die linke Seite der Gleichung $F_n = 0$ darstellt, wenn die Werthe von $w_1 - w_1^0, w_2 - w_2^0, \ldots, w_{n-1} - w_{n-1}^0$ aus den successive vorher erhaltenen Gleichungen in dieselbe eingesetzt werden. Daraus folgt aber, wie durch Rücksubstitution ersichtlich, dass $w_1 - w_1^0, w_2 - w_2^0, \ldots, w_n - w_n^0$ sich nach positiven, ganzen, steigenden Potenzen von $v_1 - v_1^0, v_2 - v_2^0, \ldots, v_\nu - v_\nu^0$ entwickeln lassen, wenn das Product

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial w_1}\right)_0 \left(\frac{\partial (F_2)}{\partial w_2}\right)_0 \cdots \left(\frac{\partial (F_n)}{\partial w_n}\right)_0,$$

oder wie bekannt, die vorher angegebene Functionaldeterminante für $w_1 = w_1^0, \ldots, w_n = w_n^0, v_1 = v_1^0, \ldots, v_\nu = v_\nu^0$ von Null verschieden ist.

dass dieses Differentialgleichungsystem stets ein und nur ein nach Maclaurinschen Reihen entwickelbares Integralsystem besitzt, welches für $x_1 = 0$ die willkürlichen Functionalwerthe

$$(25.)\quad \begin{cases} (y_1)_{x_1=0} = \omega_1(x_2, x_3, \ldots, x_\mu), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (y_m)_{x_1=0} = \omega_m(x_2, x_3, \ldots, x_\mu) \end{cases}$$

annimmt, worin die $\omega_1, \ldots, \omega_m$ ebenfalls Maclaurinsche Reihen mit Convergenzkreisen darstellen, deren Radien grösser als die Einheit sind, und die wiederum weder constante Glieder noch in den Grössen $x_2, x_3, \ldots, x_\mu$ lineare Ausdrücke enthalten.

Es wird nun zunächst möglich sein, dem Differentialgleichungsystem (24.) formal durch Potenzreihen zu genügen, deren Convergenz innerhalb bestimmter Bereiche nachher wird erwiesen werden müssen. Setzt man nämlich in Rücksicht auf (25.)

$$(26.)\quad \begin{cases} y_1 = \omega_1(x_2, \ldots, x_\mu) + x_1\omega_{11}(x_2, \ldots, x_\mu) + x_1^2\omega_{12}(x_2, \ldots, x_\mu) + \cdots, \\ y_2 = \omega_2(x_2, \ldots, x_\mu) + x_1\omega_{21}(x_2, \ldots, x_\mu) + x_1^2\omega_{22}(x_2, \ldots, x_\mu) + \cdots, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_m = \omega_m(x_2, \ldots, x_\mu) + x_1\omega_{m1}(x_2, \ldots, x_\mu) + x_1^2\omega_{m2}(x_2, \ldots, x_\mu) + \cdots, \end{cases}$$

worin die $\omega_{\alpha\beta}(x_2, \ldots, x_\mu)$ *Maclaurin*sche Reihen von $x_2, \ldots, x_\mu$ bedeuten, und führt diese Reihen in das Differentialgleichungsystem (24.) ein, so erhält man als zu befriedigende Beziehungen die folgenden:

$$(27.)\quad \begin{cases} \omega_{11} + 2x_1\omega_{12} + 3x_1^2\omega_{13} + \cdots = g_1\Big(x_1, \ldots, x_\mu, \omega_1 + x_1\omega_{11} + \cdots, \\ \qquad \ldots, \dfrac{\partial\omega_1}{\partial x_2} + x_1\dfrac{\partial\omega_{11}}{\partial x_2} + \cdots, \dfrac{\partial\omega_m}{\partial x_\mu} + x_1\dfrac{\partial\omega_{m1}}{\partial x_\mu} + \cdots\Big), \\ \omega_{21} + 2x_1\omega_{22} + 3x_1^2\omega_{23} + \cdots = g_2\Big(x_1, \ldots, x_\mu, \omega_1 + x_1\omega_{11} + \cdots, \\ \qquad \ldots, \dfrac{\partial\omega_1}{\partial x_2} + x_1\dfrac{\partial\omega_{11}}{\partial x_2} + \cdots, \dfrac{\partial\omega_m}{\partial x_\mu} + x_1\dfrac{\partial\omega_{m1}}{\partial x_\mu} + \cdots\Big), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \omega_{m1} + 2x_1\omega_{m2} + 3x_1^2\omega_{m3} + \cdots = g_m\Big(x_1, \ldots, x_\mu, \omega_1 + x_1\omega_{11} + \cdots, \\ \qquad \ldots, \dfrac{\partial\omega_1}{\partial x_2} + x_1\dfrac{\partial\omega_{11}}{\partial x_2} + \cdots, \dfrac{\partial\omega_m}{\partial x_\mu} + x_1\dfrac{\partial\omega_{m1}}{\partial x_\mu} + \cdots\Big), \end{cases}$$

welche identisch für alle Werthe von $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ erfüllt sein müssen.

Fassen wir aus der rechten Seite der λten der Gleichungen (27.)

irgend einen Posten heraus, so hat dieser die Form

$$a x_1^{\alpha_1} \dots x_\mu^{\alpha_\mu} (\omega_1 + x_1 \omega_{11} + \cdots)^{\beta_1} \dots (\omega_m + x_1 \omega_{m1} + \cdots)^{\beta_m}$$
$$\cdot \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial \omega_{11}}{\partial x_2} + \cdots\right)^{\gamma_1} \dots \left(\frac{\partial \omega_m}{\partial x_\mu} + x_1 \frac{\partial \omega_{m1}}{\partial x_\mu} + \cdots\right)^{\delta_m},$$

und wir erhalten somit durch Gleichsetzen des Coefficienten von x_1^σ auf der rechten und linken Seite dieser Gleichung die Beziehung

$$(28.) \quad \begin{cases} (\sigma+1)\omega_{\lambda\sigma+1} = \Sigma \varkappa a x_2^{\varepsilon_2} \dots x_\mu^{\varepsilon_\mu} \omega_1^{\eta_1} \dots \omega_m^{\eta_m} \omega_{11}^{\zeta_{11}} \dots \omega_{1\sigma}^{\zeta_{1\sigma}} \dots \omega_{m1}^{\zeta_{m1}} \dots \omega_{m\sigma}^{\zeta_{m\sigma}} \\ \qquad \cdot \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\right)^{\varkappa_{12}} \dots \left(\frac{\partial \omega_m}{\partial x_\mu}\right)^{\varkappa_{m\mu}} \left(\frac{\partial \omega_{11}}{\partial x_2}\right)^{\nu_{11}} \dots \left(\frac{\partial \omega_{1\sigma}}{\partial x_2}\right)^{\nu_{1\sigma}} \dots \left(\frac{\partial \omega_{m\sigma}}{\partial x_\mu}\right)^{\tau_{m\sigma}}, \end{cases}$$

worin ***der zweite Index der $\omega_{\alpha\beta}$ der rechten Seite sich höchstens bis zur Zahl σ erhebt,*** die Grössen a die Coefficienten der Reihen $g_1, \dots, g_m$, und die Grössen $\varkappa$ ganze positive Zahlen bedeuten. Aus dieser Beziehung folgt aber, dass die unbekannten *Maclaurin*schen Reihen $\omega_{\lambda\sigma+1}$ der Variabeln x_2, $x_3, \dots, x_\mu$ sich successive und eindeutig bestimmen, und dass somit dadurch die Herstellung der *Maclaurin*schen Reihen (26.) als Integrale, welche formal dem vorgelegten Differentialgleichungsystem (24.) unter den durch (25.) gegebenen Bedingungen Genüge leisten, ermöglicht ist. Es erübrigt also nur noch nachzuweisen, dass die auf diese Weise berechneten Integralreihen auch wirklich convergent sind.

Da die Convergenzradien der Reihen $g_1, \dots, g_m, \omega_1, \dots, \omega_m$ in den Gleichungen (24.) und (25.) grösser als die Einheit waren, so werden die Moduln der Coefficienten all' dieser Reihen unter einer endlichen positiven Grenze A liegen, und bestimmt man m Functionen $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ durch die Gleichungen

$$(29.) \quad \begin{cases} \Omega_1 = A\{1+(x_2+x_3+\cdots+x_\mu)+(x_2+x_3+\cdots+x_\mu)^2+\cdots\} \\ \qquad\qquad = \frac{A}{1-(x_2+x_3+\cdots+x_\mu)}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Omega_m = A\{1+(x_2+x_3+\cdots+x_\mu)+(x_2+x_3+\cdots+x_\mu)^2+\cdots\} \\ \qquad\qquad = \frac{A}{1-(x_2+x_3+\cdots+x_\mu)}, \end{cases}$$

so ist durch Vergleichung mit (25.) ersichtlich, dass

$$(30.) \quad \mathrm{mod}\,\omega_1 < \mathrm{mod}\,\Omega_1, \quad \mathrm{mod}\,\omega_2 < \mathrm{mod}\,\Omega_2, \quad \dots, \quad \mathrm{mod}\,\omega_m < \mathrm{mod}\,\Omega_m$$

ist; bestimmt man ferner die *Maclaurin*schen Reihen $\Omega_{\alpha\beta}$ von $x_2, x_3, \dots, x_\mu$

durch die Gleichungen

$$(31.)\quad \begin{cases} (\sigma+1)\Omega_{\lambda\sigma+1} = \Big[\Sigma A x_1^{a_1}\dots x_\mu^{a_\mu}(\Omega_1+x_1\Omega_{11}+\cdots)^{b_1}\dots(\Omega_m+x_1\Omega_{m1}+\cdots)^{b_m} \\ \quad\cdot\Big(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}+x_1\frac{\partial\Omega_{11}}{\partial x_2}+\cdots\Big)^{c_1}\cdots\Big(\frac{\partial\Omega_m}{\partial x_\mu}+x_1\frac{\partial\Omega_{m1}}{\partial x_\mu}+\cdots\Big)^{d_m}\Big]_{x_1^\sigma}, \end{cases}$$

worin $a_1, \dots, a_\mu, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, d_m$ alle positiven ganzzahligen Werthe annehmen sollen, und $[P]_{x_1^\sigma}$ den Coefficienten von x_1^σ in der Entwickelung der Grösse P nach positiven, ganzen, steigenden Potenzen von x_1 bedeutet, oder noch einfacher aus den Gleichungen

$$(32.)\quad \begin{cases} (\sigma+1)\Omega_{\lambda\sigma+1} \\ =\Big[\dfrac{A}{1-\Big(x_1+x_2+\cdots+x_\mu+\Omega_1+x_1\Omega_{11}+\cdots+\Omega_m+x_1\Omega_{m1}+\cdots+\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}+x_1\frac{\partial\Omega_{11}}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial\Omega_m}{\partial x_\mu}+x_1\frac{\partial\Omega_{m1}}{\partial x_\mu}+\cdots\Big)}\Big]_{x_1^\sigma}, \end{cases}$$

so sieht man einerseits durch Vergleichung mit (28.) und mit Rücksicht auf die Ungleichheiten (30.), dass

$$(33.)\qquad \operatorname{mod}\omega_{\alpha\beta} < \operatorname{mod}\Omega_{\alpha\beta}$$

ist, andererseits folgen aus (32.) die ebenfalls formal richtigen Gleichungen

$$(34.)\quad \begin{cases} \Omega_{11}+2x_1\Omega_{12}+3x_1^2\Omega_{13}+\cdots \\ = \dfrac{A}{1-\Big(x_1+\cdots+x_\mu+\Omega_1+x_1\Omega_{11}+\cdots+\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}+x_1\frac{\partial\Omega_{11}}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial\Omega_m}{\partial x_\mu}+x_1\frac{\partial\Omega_{m1}}{\partial x_\mu}+\cdots\Big)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Omega_{m1}+2x_1\Omega_{m2}+3x_1^2\Omega_{m3}+\cdots \\ = \dfrac{A}{1-\Big(x_1+\cdots+x_\mu+\Omega_1+x_1\Omega_{11}+\cdots+\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}+x_1\frac{\partial\Omega_{11}}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial\Omega_m}{\partial x_\mu}+x_1\frac{\partial\Omega_{m1}}{\partial x_\mu}+\cdots\Big)}, \end{cases}$$

und es werden somit für das partielle Differentialgleichungsystem

$$(35.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial Y_1}{\partial x_1} = \dfrac{A}{1-\Big(x_1+\cdots+x_\mu+Y_1+\cdots+Y_m+\frac{\partial Y_1}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial Y_1}{\partial x_\mu}+\cdots+\frac{\partial Y_m}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial Y_m}{\partial x_\mu}\Big)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial Y_m}{\partial x_1} = \dfrac{A}{1-\Big(x_1+\cdots+x_\mu+Y_1+\cdots+Y_m+\frac{\partial Y_1}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial Y_1}{\partial x_\mu}+\cdots+\frac{\partial Y_m}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial Y_m}{\partial x_\mu}\Big)} \end{cases}$$

die Ausdrücke

$$(36.)\quad \begin{cases} Y_1 = \Omega_1 + x_1\Omega_{11} + x_1^2\Omega_{12} + \cdots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Y_m = \Omega_m + x_1\Omega_{m1} + x_1^2\Omega_{m2} + \cdots \end{cases}$$

ein formal richtiges Integralsystem liefern, welches jedenfalls wegen der Eindeutigkeit der Coefficientenbestimmung das einzige in *Maclaurin*sche Reihen entwickelbare ist, welches für $x_1 = 0$ in die Functionalwerthe Ω_1, $\Omega_2, \ldots, \Omega_m$ von $x_2, x_3, \ldots, x_\mu$ übergeht. Wir wollen nun beweisen, dass die Reihen (36.) in der Umgebung von $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_\mu = 0$ convergente Reihen darstellen, indem wir das Integralsystem der partiellen Differentialgleichungen (35.) wirklich ermitteln.

Um das partielle Differentialgleichungsystem (35.) zu integriren, bemerke man, dass, wegen der Gleichheit der rechten Seiten der Differentialgleichungen und weil nach (29.) $\Omega_1 = \Omega_2 = \cdots = \Omega_m$ ist, auch die Integralfunctionen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ einander gleich sein werden, und somit, wenn

$$(37.)\quad Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_m = Y$$

gesetzt wird, Y ein Integral der partiellen Differentialgleichung sein wird:

$$(38.)\quad \frac{\partial Y}{\partial x_1} = \frac{A}{1-\left(x_1+x_2+\cdots+x_\mu+mY+m\frac{\partial Y}{\partial x_2}+\cdots+m\frac{\partial Y}{\partial x_\mu}\right)},$$

worin

$$(39.)\quad (Y)_{x_1=0} = \frac{A}{1-(x_2+x_3+\cdots+x_\mu)}$$

sein soll. Setzt man hierin

$$(40.)\quad x_1 = X_1,\quad x_2+x_3+\cdots+x_\mu = X_2,$$

und fasst Y als Function von X_1 und X_2 auf, so geht die partielle Differentialgleichung (38.) in

$$(41.)\quad \frac{\partial Y}{\partial X_1} = \frac{A}{1-X_1-X_2-mY-m(\mu-1)\frac{\partial Y}{\partial X_2}}$$

über, und es wird dasjenige Integral gesucht, für welches nach (39.)

$$(42.)\quad (Y)_{X_1=0} = \frac{A}{1-X_2}$$

sein soll, und wenn man endlich

$$(43.)\quad 1-X_1-X_2-mY = T$$

setzt, so bleibt die partielle Differentialgleichung zu untersuchen übrig

$$(44.)\qquad \left(\frac{\partial T}{\partial X_1}+1\right)\left(T+\mu-1+(\mu-1)\frac{\partial T}{\partial X_2}\right) = -mA,$$

für deren Integral

$$(45.)\qquad (T)_{X_1=0} = 1-X_2-\frac{mA}{1-X_2}$$

sein soll.

Setzt man in die Gleichung (44.) unter der Voraussetzung, dass

$$(46.)\qquad \Omega(T,\ X_1,\ X_2) = 0$$

irgend eine Integralbeziehung sei,

$$(47.)\qquad \frac{\partial T}{\partial X_1} = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial X_1}}{\frac{\partial \Omega}{\partial T}},\quad \frac{\partial T}{\partial X_2} = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial X_2}}{\frac{\partial \Omega}{\partial T}},$$

so geht diese Differentialgleichung in

$$(48.)\qquad \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}-\frac{\partial \Omega}{\partial X_1}\right)\left([T+\mu-1]\frac{\partial \Omega}{\partial T}-(\mu-1)\frac{\partial \Omega}{\partial X_2}\right) = -mA\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)^2$$

über, in welcher man T, X_1, X_2 als unabhängige und Ω als abhängige Variable auffassen kann, welch' letztere in der partiellen Differentialgleichung jedoch selbst nicht explicite vorkommt.

Nun ist leicht zu sehen, dass

$$(49.)\qquad \Omega = \alpha T e^{\frac{X_2}{\mu-1}} - \alpha\beta X_1 + \alpha(mA+\mu-1)e^{\frac{X_2}{\mu-1}} - mA\alpha\beta\log\left(\beta+e^{\frac{X_2}{\mu-1}}\right)$$

ein Integral der partiellen Differentialgleichung (48.) ist, wenn α und β willkürliche Constanten bedeuten, da

$$(50.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial T} = \alpha e^{\frac{X_2}{\mu-1}}, \\[2ex] \dfrac{\partial \Omega}{\partial X_1} = -\alpha\beta,\quad \dfrac{\partial \Omega}{\partial X_2} = \dfrac{\alpha T}{\mu-1}e^{\frac{X_2}{\mu-1}} + \dfrac{\alpha(mA+\mu-1)}{\mu-1}e^{\frac{X_2}{\mu-1}} - \dfrac{mA\alpha\beta e^{\frac{X_2}{\mu-1}}}{(\mu-1)\left(\beta+e^{\frac{X_2}{\mu-1}}\right)} \end{cases}$$

in (48.) eingesetzt dieselbe identisch befriedigen, und es soll nun durch Variation der Constanten α und β, also dadurch, dass α und β als Functionen von T, X_1, X_2 bestimmt werden, die Integralform (49.) in ein Integral übergeführt werden, welches für $X_1 = 0$ den Werth

$$(51.)\qquad (\Omega)_{X_1=0} = T-1+X_2+\frac{mA}{1-X_2}$$

annimmt; ist dies geschehen, so wird nach (46.) $\Omega = 0$ gesetzt die Grösse T als Function von X_1 und X_2 so bestimmen, dass dieselbe ein Integral der Differentialgleichung (44.) wird und zugleich, wie aus (44.) und (51.) hervorgeht, für $X_1 = 0$ den verlangten Werth (45.) annimmt.

Bezeichnet man zur Abkürzung die Gleichungen (49.) und (51.) durch

$$\Omega = \psi(T,\ X_1,\ X_2,\ \alpha,\ \beta),\quad (\Omega)_{X_1=0} = \varphi(T,\ X_2) \tag{52.}$$

und setzt*)

$$\Omega = \psi(T,\ X_1,\ X_2,\ \alpha,\ \beta) - \psi(\tau,\ 0,\ \xi,\ \alpha,\ \beta) + \varphi(\tau,\ \xi), \tag{53.}$$

worin α, β, τ, ξ als zu bestimmende Functionen von T, X_1, X_2 betrachtet werden, so folgt

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial T} = \frac{\partial\psi(T,X_1,X_2,\alpha,\beta)}{\partial T} &+ \left(\frac{\partial\psi(T,X_1,X_2,\alpha,\beta)}{\partial\alpha} - \frac{\partial\psi(\tau,0,\xi,\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial T}\\ &+ \left(\frac{\partial\psi(T,X_1,X_2,\alpha,\beta)}{\partial\beta} - \frac{\partial\psi(\tau,0,\xi,\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right)\frac{\partial\beta}{\partial T}\\ &- \left(\frac{\partial\psi(\tau,0,\xi,\alpha,\beta)}{\partial\tau} - \frac{\partial\varphi(\tau,\xi)}{\partial\tau}\right)\frac{\partial\tau}{\partial T}\\ &- \left(\frac{\partial\psi(\tau,0,\xi,\alpha,\beta)}{\partial\xi} - \frac{\partial\varphi(\tau,\xi)}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\xi}{\partial T}\end{aligned}\right. \tag{54.}$$

und die entsprechenden Werthe für

$$\frac{\partial\Omega}{\partial X_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\Omega}{\partial X_2},$$

so dass man wieder die Werthe (50.), also durch Elimination von α und β wieder die Differentialgleichung (48.) erhält, und somit die Form (53.) wiederum ein Integral der Differentialgleichung (48.) wird, wenn man α, β, τ, ξ so bestimmt, dass die Gleichungen befriedigt werden

$$\frac{\partial\psi(T,\ X_1,\ X_2,\ \alpha,\ \beta)}{\partial\alpha} = \frac{\partial\psi(\tau,\ 0,\ \xi,\ \alpha,\ \beta)}{\partial\alpha}, \tag{55.}$$

$$\frac{\partial\psi(T,\ X_1,\ X_2,\ \alpha,\ \beta)}{\partial\beta} = \frac{\partial\psi(\tau,\ 0,\ \xi,\ \alpha,\ \beta)}{\partial\beta}, \tag{56.}$$

$$\frac{\partial\psi(\tau,\ 0,\ \xi,\ \alpha,\ \beta)}{\partial\tau} = \frac{\partial\varphi(\tau,\ \xi)}{\partial\tau}, \tag{57.}$$

$$\frac{\partial\psi(\tau,\ 0,\ \xi,\ \alpha,\ \beta)}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi(\tau,\ \xi)}{\partial\xi}, \tag{58.}$$

oder nach (52.), (51.) und (49.):

*) Vergl. *A. Mayer*, die *Lie*sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Mathematische Annalen Bd. VI.

$$(59.)\quad \begin{cases} \tau e^{\frac{\xi}{\mu-1}}+(mA+\mu-1)e^{\frac{\xi}{\mu-1}}-mA\beta\log(\beta+e^{\frac{\xi}{\mu-1}}) \\ = Te^{\frac{X_2}{\mu-1}}-\beta X_1+(mA+\mu-1)e^{\frac{X_2}{\mu-1}}-mA\beta\log(\beta+e^{\frac{X_2}{\mu-1}}), \end{cases}$$

$$(60.)\quad mA\log(\beta+e^{\frac{\xi}{\mu-1}})+\frac{mA\beta}{\beta+e^{\frac{\xi}{\mu-1}}} = X_1+mA\log(\beta+e^{\frac{X_2}{\mu-1}})+\frac{mA\beta}{\beta+e^{\frac{X_2}{\mu-1}}},$$

$$(61.)\quad \alpha e^{\frac{\xi}{\mu-1}} = 1,$$

$$(62.)\quad \frac{\alpha\tau}{\mu-1}e^{\frac{\xi}{\mu-1}}+\frac{\alpha(mA+\mu-1)}{\mu-1}e^{\frac{\xi}{\mu-1}}-\frac{mA\alpha\beta e^{\frac{\xi}{\mu-1}}}{(\mu-1)(\beta+e^{\frac{\xi}{\mu-1}})} = 1+\frac{mA}{(1-\xi)^2}$$

wird, wobei zu bemerken, dass diese Gleichungen für $X_1 = 0$ durch

$$\tau = T,\quad \xi = X_2$$

befriedigt werden.

Für das oben gestellte Problem kommt es jedoch nicht sowohl auf die wirkliche Darstellung des Integrales als vielmehr darauf an, nachzuweisen, dass, wenn nach Bestimmung der α, β, τ, ξ als Functionen von T, X_1, X_2 aus den Gleichungen (59.)—(62.) aus dem gleich Null gesetzten Werthe von Ω der Gleichung (53.) T als Function von X_1 und X_2 in der Umgebung der Nullpunkte dieser beiden Variabeln und für den aus (51.) hervorgehenden Werth

$$(63.)\quad (T)_{X_1=0,\,X_2=0} = 1-mA$$

entwickelt wird, diese Entwickelung eine nach positiven, ganzen, steigenden Potenzen von X_1 und X_2 fortschreitende ist, und bekanntlich wird die Existenz einer solchen Entwickelung erwiesen sein, wenn

$$(64.)\quad \left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{X_1=0,\,X_2=0,\,T=1-mA}$$

von Null verschieden ist.

Da nun für $X_1 = 0$

$$(65.)\quad \tau = T,\quad \xi = X_2$$

sein soll, so werden, wie aus den Gleichungen (59.)—(62.) unmittelbar ersichtlich, den Werthen

$$(66.)\quad X_1 = 0,\quad X_2 = 0,\quad T = 1-mA$$

die Werthe

$$(67.)\quad (\alpha) = 1,\quad (\beta) = \frac{1-mA(\mu-1)}{mA\mu-1},\quad (\xi) = 0,\quad (\tau) = 1-mA$$

entsprechen; differentiirt man die Gleichung (61.) partiell nach T, so ergiebt sich für die Werthe (66.), (67.)

$$(68.)\qquad \left(\frac{\partial \xi}{\partial T}\right) = -(\mu-1)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right),$$

und hiernach aus (60.)

$$(69.)\qquad \frac{(mA\mu-1)^2}{mA}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right) = 0$$

oder

$$(70.)\qquad \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right) = 0,$$

weil A als eine über den Moduln aller Coefficienten des ursprünglichen Differentialgleichungsystems liegende Grösse stets so gross gewählt werden konnte, dass $mA\mu-1$ von Null verschieden ist. Aus (68.) und (70.) folgt aber nun mittels Differentiation der Gleichungen (59.) und (62.) nach T, dass

$$(71.)\quad \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right) = 0,\quad \left(\frac{\partial \beta}{\partial T}\right) = \frac{mA}{(mA\mu-1)^2},\quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial T}\right) = 0,\quad \left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right) = 1$$

ist, und somit aus (53.)

$$(72.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right) = \left(\frac{\partial \psi(T, X_1, X_2, \alpha, \beta)}{\partial T}\right) + \left(\frac{\partial \psi(T, X_1, X_2, \alpha, \beta)}{\partial \beta}\right)\frac{mA}{(mA\mu-1)^2} \\ -\left(\frac{\partial \psi(\tau, 0, \xi, \alpha, \beta)}{\partial \tau}\right) - \left(\frac{\partial \psi(\tau, 0, \xi, \alpha, \beta)}{\partial \beta}\right)\frac{mA}{(mA\mu-1)^2} + \left(\frac{\partial \varphi(\tau, \xi)}{\partial \tau}\right), \end{cases}$$

oder, da nach (49.) und (52.)

$$(73.)\qquad \left(\frac{\partial \psi(T, X_1, X_2, \alpha, \beta)}{\partial T}\right) = 1 = \left(\frac{\partial \psi(\tau, 0, \xi, \alpha, \beta)}{\partial \tau}\right),$$

$$(74.)\ \left(\frac{\partial \psi(T, X_1, X_2, \alpha, \beta)}{\partial \beta}\right) = -mA\log\frac{mA}{mA\mu-1} + mA(\mu-1) - 1 = \left(\frac{\partial \psi(\tau, 0, \xi, \alpha, \beta)}{\partial \beta}\right),$$

$$(75.)\qquad \left(\frac{\partial \varphi(\tau, \xi)}{\partial \tau}\right) = 1$$

ist,

$$(76.)\qquad \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right) = 1,$$

also von Null verschieden, und es ist somit das Integral der partiellen Differentialgleichung (44.), das für $X_1 = 0$ den durch die Gleichung (45.) bestimmten Werth annimmt, in eine nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von X_1 und X_2 fortlaufende Reihe entwickelbar.

Nachdem nun bewiesen worden, dass das Integralsystem (36.) der partiellen Differentialgleichungen (35.) aus convergenten, um die Nullpunkte

der Variabeln herum gültigen, nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen derselben fortschreitenden Entwickelungen besteht, folgt aber, da die Coefficienten dieser Entwickelungen (36.) durch die Gleichungen (31.) bestimmt werden, vermöge der oben festgestellten Ungleichheiten (30.) und (33.), dass die aus den analogen Gleichungen (28.) hergeleiteten Coefficienten $\omega_{\alpha\beta}$ derart sind, dass die Integralreihen (26.) des Differentialgleichungsystems (24.) ebenfalls in der Umgebung der Nullpunkte der unabhängigen Variabeln convergent sind, da die Moduln der Coefficienten der einzelnen Potenzen von x_1 kleiner sind als die Moduln der entsprechenden Glieder in den analogen Integralreihen (36.), deren Convergenz festgestellt war.

Es ist somit der Existenzbeweis für das Integralsystem der Differentialgleichungen (11.) mit den durch (12.) gegebenen Bestimmungen geführt.

Aber dieses nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von

$$z_1-a_1,\quad z_2-a_2,\quad \ldots,\quad z_\mu-a_\mu$$

fortschreitende Integralsystem ist auch das einzige Functionalsystem, welches dem Systeme der Differentialgleichungen (11.) *Genüge leistet und für* $z_1=0$ *in die durch die Gleichungen* (12.) *gegebenen Functionen von* $x_2, x_3, \ldots, x_\mu$ *übergeht.*

Denn angenommen, es existirten für das Differentialgleichungsystem (11.) mit den durch (12.) gegebenen Bestimmungen zwei Integralsysteme, von denen das oben gefundene, nach *Taylor*schen Reihen entwickelbare mit

$$\bar{u}_1,\quad \bar{u}_2,\quad \ldots,\quad \bar{u}_m, \tag{77.}$$

das andere mit

$$U_1,\quad U_2,\quad \ldots,\quad U_m \tag{78.}$$

bezeichnet werden mag, so werden, wenn

$$U_1=\bar{u}_1+v_1,\quad U_2=\bar{u}_2+v_2,\quad \ldots,\quad U_m=\bar{u}_m+v_m \tag{79.}$$

gesetzt wird, die aus den Differentialgleichungen (17.) hervorgehenden Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial(\bar{u}_1+v_1)}{\partial z_1} &= r_1\Big(z_1-a_1,\ \ldots,\ z_\mu-a_\mu,\ \bar{u}_1+v_1-b_1,\ \ldots,\ \bar{u}_m+v_m-b_m,\\
&\qquad \frac{\partial\bar{u}_1}{\partial z_2}+\frac{\partial v_1}{\partial z_2}-b_{12},\ \ldots,\ \frac{\partial\bar{u}_1}{\partial z_\mu}+\frac{\partial v_1}{\partial z_\mu}-b_{1\mu},\ \ldots\Big),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial(\bar{u}_m+v_m)}{\partial z_1} &= r_m\Big(z_1-a_1,\ \ldots,\ z_\mu-a_\mu,\ \bar{u}_1+v_1-b_1,\ \ldots,\ \bar{u}_m+v_m-b_m,\\
&\qquad \frac{\partial\bar{u}_1}{\partial z_2}+\frac{\partial v_1}{\partial z_2}-b_{12},\ \ldots,\ \frac{\partial\bar{u}_1}{\partial z_\mu}+\frac{\partial v_1}{\partial z_\mu}-b_{1\mu},\ \ldots\Big)
\end{aligned}\right. \tag{80.}$$

identisch befriedigt sein, aus denen wiederum, da das Integralsystem (77.) ebenfalls das Differentialgleichungssystem (17.) befriedigt,

$$(81.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial z_1} = r_1\left(z_1-a_1, \ldots, z_\mu-a_\mu, \bar{u}_1+v_1-b_1, \ldots, \dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial z_2}+\dfrac{\partial v_1}{\partial z_2}-b_{12}, \ldots\right) \\ \qquad -r_1\left(z_1-a_1, \ldots, z_\mu-a_\mu, \bar{u}_1-b_1, \ldots, \dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial z_2}-b_{12}, \ldots\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial v_m}{\partial z_1} = r_m\left(z_1-a_1, \ldots, z_\mu-a_\mu, \bar{u}_1+v_1-b_1, \ldots, \dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial z_2}+\dfrac{\partial v_1}{\partial z_2}-b_{12}, \ldots\right) \\ \qquad -r_m\left(z_1-a_1, \ldots, z_\mu-a_\mu, \bar{u}_1-b_1, \ldots, \dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial z_2}-b_{12}, \ldots\right) \end{cases}$$

hervorgeht, wobei zu bemerken, dass wegen der gleichen Anfangsbedingungen für U_α und $\bar{u}_\alpha$ die Functionen $v_1, v_2, \ldots, v_m$ für $z_1 = a_1$ identisch Null sein müssen für beliebige Werthe von $z_2, z_3, \ldots, z_\mu$. Denkt man sich nun die *Taylor*schen Reihen für $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m$ in die rechten Seiten der Gleichungen (81.) eingesetzt und beachtet, dass diese für

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_m = \frac{\partial v_1}{\partial z_2} = \cdots = \frac{\partial v_m}{\partial z_\mu} = 0$$

identisch verschwinden, also kein von diesen Grössen freies Glied enthalten, so wird sich zur Bestimmung der Functionen $v_1, v_2, \ldots, v_m$ ein Differentialgleichungsystem der Form ergeben

$$(82.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial z_1} = \left(v_1, \ldots, v_m, \dfrac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial v_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \dfrac{\partial v_m}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial v_m}{\partial z_\mu}\right)_1 \\ \qquad +\left(v_1, \ldots, v_m, \dfrac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial v_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \dfrac{\partial v_m}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial v_m}{\partial z_\mu}\right)_2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial v_m}{\partial z_1} = \left(v_1, \ldots, v_m, \dfrac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial v_1}{d z_\mu}, \ldots, \dfrac{\partial v_m}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial v_m}{\partial z_\mu}\right)_1 \\ \qquad +\left(v_1, \ldots, v_m, \dfrac{\partial v_1}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial v_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \dfrac{\partial v_m}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial v_m}{\partial z_\mu}\right)_2 + \cdots, \end{cases}$$

worin $(v_1, \ldots)_\lambda$ eine homogene Function des λten Grades der eingeschlossenen Grössen bedeutet, deren Coefficienten *Taylor*sche Reihen nach Potenzen von $z_1-a_1, \ldots, z_\mu-a_\mu$ fortschreitend darstellen. Da aber für $z_1 = a_1$ die Werthe von $v_1, v_2, \ldots, v_m$ für willkürliche Werthe von $z_2, z_3, \ldots, z_\mu$ in der Umgebung der Punkte $a_2, a_3, \ldots, a_\mu$, also ebenso auch die rechten

Seiten der Gleichungen (82.) verschwinden, so zeigen eben diese Differentialgleichungen (82.), dass auch für alle weiteren, in der Umgebung von a_1 befindlichen Werthe von z_1 und für beliebige Werthe von $z_2, z_3, \dots, z_\mu$ auch $v_1, v_2, \dots, v_m$, da ihre Incremente Null sind, ebenfalls verschwinden, d. h. in der Umgebung von $a_1, a_2, \dots, a_\mu$ identisch Null werden, nach (79.) somit die beiden Integralsysteme der partiellen Differentialgleichungen identisch sind; es giebt somit nur *ein* Integralsystem mit den gegebenen Anfangsbedingungen.

Wir können dem eben bewiesenen Satze von der Existenz der Integralfunctionen eines partiellen Differentialgleichungssystems noch andere in Bezug auf die Anfangsbedingungen verschiedene Formen geben.

Sei wieder das Differentialgleichungsystem (11.) vorgelegt, und werde verlangt, ein Integralsystem dieser Differentialgleichungen zu finden von der Art, dass, wenn zwischen den unabhängigen Variabeln $z_1, z_2, \dots, z_\mu$ eine Beziehung

$$\theta(z_1, z_2, \dots, z_\mu) = A \tag{83.}$$

stattfindet, welcher durch ein Werthesystem $z_1 = a_1, z_2 = a_2, \dots, z_\mu = a_\mu$ genügt wird, in dessen Umgebung die Function θ in eine nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von $z_1-a_1, z_2-a_2, \dots, z_\mu-a_\mu$ fortschreitende Reihe entwickelbar ist, die Integrale $u_1, u_2, \dots, u_m$ die willkürlich gewählten Functionalwerthe

$$(84.)\qquad \begin{cases} u_1 = \psi_1(z_1, z_2, \dots, z_\mu), \\ u_2 = \psi_2(z_1, z_2, \dots, z_\mu), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_m = \psi_m(z_1, z_2, \dots, z_\mu) \end{cases}$$

annehmen, welche wiederum in der Umgebung von $a_1, a_2, \dots, a_\mu$ convergente *Taylor*sche Reihen darstellen sollen, die durch

$$(85.)\qquad \begin{cases} u_1 = \omega_1(z_1-a_1, z_2-a_2, \dots, z_\mu-a_\mu), \\ u_2 = \omega_2(z_1-a_1, z_2-a_2, \dots, z_\mu-a_\mu), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_m = \omega_m(z_1-a_1, z_2-a_2, \dots, z_\mu-a_\mu) \end{cases}$$

bezeichnet werden mögen.

Um diese Untersuchung auf die frühere zurückzuführen, setze man

$$(86.)\qquad \theta(z_1, z_2, \ldots, z_\mu) = Z_\mu,$$

und führe in das Problem die μ unabhängigen Variabeln

$$(87.)\qquad Z_\mu, \quad z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_{\mu-1}$$

ein; nimmt man nun zunächst an, dass eine der Grössen

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial z_1}\right)_{a_1, a_2, \ldots, a_\mu}, \quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial z_2}\right)_{a_1, a_2, \ldots, a_\mu}, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu}\right)_{a_1, a_2, \ldots, a_\mu},$$

z. B.

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu}\right)_{a_1, a_2, \ldots, a_\mu},$$

von Null verschieden ist, so wird sich nach bekannten Sätzen $z_\mu - a_\mu$ in eine nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von

$$z_1 - a_1, \quad z_2 - a_2, \quad \ldots, \quad z_{\mu-1} - a_{\mu-1}, \quad Z_\mu - A$$

fortschreitende Reihe

$$(88.)\qquad z_\mu - a_\mu = R(z_1 - a_1, z_2 - a_2, \ldots, z_{\mu-1} - a_{\mu-1}, Z_\mu - A)$$

entwickeln lassen, und führt man diesen Werth in die Gleichungen (84.) ein, so ergeben sich für $u_1, u_2, \ldots, u_m$ die Werthe

$$(89.)\qquad \begin{cases} (u_1)_{Z_\mu = A} = r_1(z_1 - a_1, z_2 - a_2, \ldots, z_{\mu-1} - a_{\mu-1}), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (u_m)_{Z_\mu = A} = r_m(z_1 - a_1, z_2 - a_2, \ldots, z_{\mu-1} - a_{\mu-1}), \end{cases}$$

worin $r_1, \ldots, r_m$ wiederum *Taylor*sche Reihen bedeuten.

Um nun weiter den Charakter des Differentialgleichungssystems (11.) in Bezug auf die Entwickelbarkeit der linken Seiten zu bestimmen, ist es nöthig, die Werthe der partiellen Differentialquotienten der u-Grössen unter der durch die Gleichung (83.) angegebenen Beschränkung der Variabeln zu bestimmen, und man sieht unmittelbar aus den Gleichungen (84.), dass für die Variabelnverbindungen von (83.) die Beziehungen bestehen müssen

$$(90.)\quad \left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_1} - \frac{\partial \psi_\varrho}{\partial z_1}\right)dz_1 + \left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_2} - \frac{\partial \psi_\varrho}{\partial z_2}\right)dz_2 + \cdots + \left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_\mu} - \frac{\partial \psi_\varrho}{\partial z_\mu}\right)dz_\mu = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

und

$$(91.)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial z_1}dz_1 + \frac{\partial\theta}{\partial z_2}dz_2 + \cdots + \frac{\partial\theta}{\partial z_\mu}dz_\mu = 0,$$

woraus sich wegen der Willkürlichkeit der Variabeln $z_1, z_2, \dots, z_{\mu-1}$ unter einander die Gleichungen ergeben

$$(92.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_1} - \frac{\partial \psi_\varrho}{\partial z_1}\right)\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu} - \left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_\mu} - \frac{\partial \psi_\varrho}{\partial z_\mu}\right)\frac{\partial\theta}{\partial z_1} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_{\mu-1}} - \frac{\partial \psi_\varrho}{\partial z_{\mu-1}}\right)\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu} - \left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_\mu} - \frac{\partial \psi_\varrho}{\partial z_\mu}\right)\frac{\partial\theta}{\partial z_{\mu-1}} = 0, \end{cases} \qquad (\text{für } \varrho = 1, 2, \dots, m)$$

die, mit den m partiellen Differentialgleichungen (11.) zusammengestellt, vermöge der Voraussetzung, dass $\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu}$ von Null verschieden, die Werthe für die μm partiellen Differentialquotienten unter der durch die Gleichung (83.) gegebenen Beschränkung der Variabeln liefern, wenn wieder angenommen wird, dass die aus allen diesen Gleichungen nach den partiellen Differentialquotienten genommene Functionaldeterminante $m\mu$ter Ordnung

$$(93.)\quad D_1 = \left|\begin{array}{cccccccccccc}
\frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_1}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_1}} & \frac{\partial\theta}{\partial z_\mu} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots 0 \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_2}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_2}} & 0 & \frac{\partial\theta}{\partial z_\mu} & \cdots & 0 & 0 & \cdots 0 \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_{\mu-1}}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_{\mu-1}}} & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial\theta}{\partial z_\mu} & 0 & \cdots 0 \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}} & -\frac{\partial\theta}{\partial z_1} & -\frac{\partial\theta}{\partial z_2} & \cdots & -\frac{\partial\theta}{\partial z_{\mu-1}} & 0 & \cdots 0 \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_1}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial\theta}{\partial z_\mu} & \cdots 0 \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_1}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots 0 \cdots & \frac{\partial\theta}{\partial z_\mu} & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots 0 \cdots & -\frac{\partial\theta}{\partial z_1} - \frac{\partial\theta}{\partial z_2} & \cdots & -\frac{\partial\theta}{\partial z_{\mu-1}}
\end{array}\right|$$

für die durch die Gleichungen (84.) und (92.) gegebenen Anfangswerthe

$$(94.)\quad \begin{cases} (z_1) = a_1, \quad (z_2) = a_2, \quad \ldots, \quad (z_\mu) = a_\mu, \\ u_1 = \psi_1(a_1, \ldots, a_\mu), \quad u_2 = \psi_2(a_1, \ldots, a_\mu), \quad \ldots, \quad u_m = \psi_m(a_1 \ldots, a_\mu), \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right) = \psi_{11}(a_1, \ldots, a_\mu), \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}\right) = \psi_{1\mu}(a_1, \ldots, a_\mu), \quad \ldots, \\ \left(\frac{\partial u_m}{\partial z_1}\right) = \psi_{m1}(a_1, \ldots, a_\mu), \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\right) = \psi_{m\mu}(a_1, \ldots, a_\mu) \end{cases}$$

von Null verschieden ist.

Nehmen wir nun an, dass das Differentialgleichungsystem (11.) in der Umgebung der eben ermittelten Anfangswerthe (94.) den Charakter von ganzen Functionen, die linken Seiten der einzelnen Gleichungen sich also nach ganzen, positiven, steigenden Potenzen von

$$z_1 - a_1, \; \ldots, \; z_\mu - a_\mu, \; u_1 - \psi_1, \; \ldots, \; u_m - \psi_m, \; \frac{\partial u_1}{\partial z_1} - \psi_{11}, \; \ldots, \; \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu} - \psi_{m\mu}$$

entwickeln lassen, so ist leicht zu sehen, dass die Einführung der neuen Variabeln Z_μ in das Differentialgleichungsystem die Entwickelbarkeit in der Umgebung des neuen Anfangssystems bestehen lässt; denn, wenn die partiellen Differentialquotienten der $u_1, \ldots, u_m$, als Functionen von $z_1, \ldots, z_{\mu-1}, Z_\mu$ aufgefasst, durch Klammern unterschieden werden, so ist vermöge (86.)

$$(95.)\quad \begin{cases} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_1} = \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial z_1}\right) + \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial Z_\mu}\right)\frac{\partial \theta}{\partial z_1}, \quad \ldots, \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_{\mu-1}} = \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial z_{\mu-1}}\right) + \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial Z_\mu}\right)\frac{\partial \theta}{\partial z_{\mu-1}}, \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_\mu} = \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial Z_\mu}\right)\frac{\partial \theta}{\partial z_\mu}, \end{cases}$$

und daher einerseits ersichtlich, welches die Werthe der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial u_\alpha}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_{\mu-1}}, \frac{\partial u_\alpha}{\partial Z_\mu}$ für das Anfangssystem $a_1, a_2, \ldots, a_{\mu-1}, A$ sind, andererseits einleuchtend, dass die Einführung der Ausdrücke (88.) und (95.) in das Differentialgleichungsystem (11.) den Charakter der ganzen Functionen oder der Entwickelbarkeit nicht ändert. Für das so transformirte Differentialgleichungsystem sind somit vermöge der Gleichungen (89.), welche den Gleichungen (12.) des Fundamentalsatzes entsprechen, die Bedingungen 1) und 2) dieses Satzes erfüllt, und es bleibt nur noch die auf die Functionaldeterminante bezügliche Bedingung 3) zu untersuchen.

Zunächst ist aber leicht zu sehen, dass die Determinante D_1 der Gleichung (51.), wenn man in je μ aufeinanderfolgenden Horizontalreihen die erste mit $\frac{\partial\theta}{\partial z_1}$, die zweite mit $\frac{\partial\theta}{\partial z_2}$, ..., die μte mit $\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu}$ multiplicirt und zur ersten Horizontalreihe addirt, durch eine unmittelbar ersichtliche Zerlegung sich in

$$(96.)\quad \begin{cases} D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial\frac{\partial u_1}{\partial z_1}}\frac{\partial\theta}{\partial z_1}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial\frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}}\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu}, & \ldots, & \frac{\partial F_m}{\partial\frac{\partial u_1}{\partial z_1}}\frac{\partial\theta}{\partial z_1}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial\frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}}\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu} \\ \frac{\partial F_1}{\partial\frac{\partial u_2}{\partial z_1}}\frac{\partial\theta}{\partial z_1}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial\frac{\partial u_2}{\partial z_\mu}}\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu}, & \ldots, & \frac{\partial F_m}{\partial\frac{\partial u_2}{\partial z_1}}\frac{\partial\theta}{\partial z_1}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial\frac{\partial u_2}{\partial z_\mu}}\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial\frac{\partial u_m}{\partial z_1}}\frac{\partial\theta}{\partial z_1}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial\frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}}\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu}, & \ldots, & \frac{\partial F_m}{\partial\frac{\partial u_m}{\partial z_1}}\frac{\partial\theta}{\partial z_1}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial\frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}}\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu} \end{vmatrix} \\ \qquad\qquad \cdot \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\theta}{\partial z_\mu} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial\theta}{\partial z_\mu} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial\theta}{\partial z_\mu} \\ \frac{\partial\theta}{\partial z_1} & \frac{\partial\theta}{\partial z_2} & \ldots & \ldots & \frac{\partial\theta}{\partial z_{\mu-1}} \end{vmatrix}^\lambda \frac{1}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial z_1}\right)^\lambda} \\ = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial\frac{\partial u_1}{\partial z_1}}\frac{\partial\theta}{\partial z_1}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial\frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}}\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu}, & \ldots, & \frac{\partial F_m}{\partial\frac{\partial u_1}{\partial z_1}}\frac{\partial\theta}{\partial z_1}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial\frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}}\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial\frac{\partial u_m}{\partial z_1}}\frac{\partial\theta}{\partial z_1}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial\frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}}\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu}, & \ldots, & \frac{\partial F_m}{\partial\frac{\partial u_m}{\partial z_1}}\frac{\partial\theta}{\partial z_1}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial\frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}}\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu} \end{vmatrix} \cdot \left(\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu}\right)^{(\mu-2)\lambda} \end{cases}$$

verwandelt; da aber vermöge der Gleichungen (95.)

$$(97.)\quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial\left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial Z_\mu}\right)} = \frac{\partial F_\alpha}{\partial\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_1}}\frac{\partial\theta}{\partial z_1}+\frac{\partial F_\alpha}{\partial\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_2}}\frac{\partial\theta}{\partial z_2}+\cdots+\frac{\partial F_\alpha}{\partial\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_{\mu-1}}}\frac{\partial\theta}{\partial z_{\mu-1}}+\frac{\partial F_\alpha}{\partial\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_\mu}}\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu}$$

ist, so können wir D_1 in die Form setzen

$$(98.)\quad D_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial Z_\mu}\right)} & \dfrac{\partial F_2}{\partial\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial Z_\mu}\right)} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial Z_\mu}\right)} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial Z_\mu}\right)} & \dfrac{\partial F_2}{\partial\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial Z_\mu}\right)} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial Z_\mu}\right)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial\left(\dfrac{\partial u_m}{\partial Z_\mu}\right)} & \dfrac{\partial F_2}{\partial\left(\dfrac{\partial u_m}{\partial Z_\mu}\right)} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial\left(\dfrac{\partial u_m}{\partial Z_\mu}\right)} \end{vmatrix} \left(\frac{\partial\theta}{\partial z_\mu}\right)^{(\mu-2)\lambda},$$

und die Annahme, dass D_1, also auch die rechts stehende Determinante für die oben näher bestimmten Anfangswerthe von Null verschieden ist, würde die Bedingung 3) des oben ausgesprochenen Fundamentalsatzes erfüllen, so dass für das transformirte Differentialgleichungsystem, also auch für das ursprüngliche unter den angegebenen Bedingungen die Entwickelbarkeit der Integralfunctionen in der Umgebung der Anfangswerthe $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ erwiesen ist.

Fassen wir die letzteren Auseinandersetzungen zusammen, so ergiebt sich der folgende Satz:

Sei ein partielles Differentialgleichungsystem erster Ordnung und mter Klasse gegeben:

$$(99.)\quad \begin{cases} F_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\right) = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ F_m\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\right) = 0, \end{cases}$$

in welchem $F_1, \ldots, F_m$ beliebige Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, und werde verlangt, ein Integralsystem zu finden, welches für alle Wertheverbindungen zwischen $z_1, \ldots, z_\mu$, welche der Gleichung genügen

$$(100.)\quad \theta(z_1, z, \ldots, z_\mu) = A,$$

die Werthe annimmt

$$(101.)\quad u_1 = \psi_1(z_1, z_2, \ldots, z_\mu),\ u_2 = \psi_2(z_1, z_2, \ldots, z_\mu),\ \ldots,\ u_m = \psi_m(z_1, z_2, \ldots, z_\mu),$$

so kann man in Betreff der Existenz und Natur eines solchen Integralsystems folgenden Satz aussprechen. Greift man irgend ein die Gleichung (100.) *befriedigendes Werthesystem $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ für $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ heraus, von der Eigenschaft, dass*

1) *die Functionen*

$$\theta(z_1, z_2, \ldots, z_\mu), \quad \psi_1(z_1, z_2, \ldots, z_\mu), \quad \ldots, \quad \psi_m(z_1, z_2, \ldots, z_\mu)$$

in der Umgebung dieser Werthe den Charakter von ganzen Functionen haben, also nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von z_1-a_1, z_2-a_2, $\ldots$, $z_\mu-a_\mu$ *entwickelbar sind,*

2) *mindestens eine der Ableitungen erster Ordnung der Functionen* θ *nach* $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$, *z. B.*

$$\frac{\partial\theta}{\partial z_\nu},$$

für $z_1 = a_1, \ldots, z_\mu = a_\mu$ *von Null verschieden,*

3) *die linken Seiten der partiellen Differentialgleichungen* (99.) *in der Umgebung der Anfangswerthe*

$$z_1 = a_1, \ldots, z_\mu = a_\mu, \; u_1 = \psi_1(a_1, \ldots, a_\mu), \ldots, u_m = \psi_m(a_1, \ldots, a_\mu) \tag{102.}$$

und der aus den $m\mu$ *Gleichungen*

$$\text{(103.)} \begin{cases} F_1\Big(a_1, \ldots, a_\mu, \psi_1(a_1, \ldots, a_\mu), \ldots, \psi_m(a_1, \ldots, a_\mu), \\ \qquad \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\Big) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_m\Big(a_1, \ldots, a_\mu, \psi_1(a_1, \ldots, a_\mu), \ldots, \psi_m(a_1, \ldots, a_\mu), \\ \qquad \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\Big) = 0, \end{cases}$$

$$\text{(104.)} \begin{cases} \left(\dfrac{\partial u_\varrho}{\partial z_1} - \dfrac{\partial \psi_\varrho}{\partial z_1}\right)\dfrac{\partial\theta}{\partial z_\nu} - \left(\dfrac{\partial u_\varrho}{\partial z_\nu} - \dfrac{\partial \varphi_\varrho}{\partial z_\nu}\right)\dfrac{\partial\theta}{\partial z_1} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \left(\dfrac{\partial u_\varrho}{\partial z_\mu} - \dfrac{\partial \psi_\varrho}{\partial z_\mu}\right)\dfrac{\partial\theta}{\partial z_\nu} - \left(\dfrac{\partial u_\varrho}{\partial z_\nu} - \dfrac{\partial \varphi_\varrho}{\partial z_\nu}\right)\dfrac{\partial\theta}{\partial z_\mu} = 0 \end{cases} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

hervorgehenden Werthen von

$$\text{(105.)} \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} = \psi_{11}(a_1, \ldots, a_\mu), \ldots, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu} = \psi_{1\mu}(a_1, \ldots, a_\mu), \ldots, \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial z_1} = \psi_{m1}(a_1, \ldots, a_\mu), \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_\mu} = \psi_{m\mu}(a_1, \ldots, a_\mu) \end{cases}$$

den Charakter von ganzen Functionen haben, sich also nach Taylorschen Reihen entwickeln lassen, endlich

4) *die Determinante*

$$(106.)\quad D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_1}} \frac{\partial \theta}{\partial z_1} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}} \frac{\partial \theta}{\partial z_\mu}, & \ldots, & \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_1}} \frac{\partial \theta}{\partial z_1} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}} \frac{\partial \theta}{\partial z_\mu} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_1}} \frac{\partial \theta}{\partial z_1} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_\mu}} \frac{\partial \theta}{\partial z_\mu}, & \ldots, & \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_1}} \frac{\partial \theta}{\partial z_1} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_\mu}} \frac{\partial \theta}{\partial z_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_1}} \frac{\partial \theta}{\partial z_1} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}} \frac{\partial \theta}{\partial z_\mu}, & \ldots, & \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_1}} \frac{\partial \theta}{\partial z_1} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}} \frac{\partial \theta}{\partial z_\mu} \end{vmatrix}$$

oder, was dasselbe ist, der Ausdruck

$$(107.)\quad \Sigma \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_\alpha}} & \frac{\partial F_2}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_\beta}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_\varrho}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_\alpha}} & \frac{\partial F_2}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_\beta}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_\varrho}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_\alpha}} & \frac{\partial F_2}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_\beta}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_\varrho}} \end{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial z_\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial z_\beta} \cdots \frac{\partial \theta}{\partial z_\varrho},$$

worin $\alpha, \beta, \ldots, \varrho$ *alle Werthe* $1, 2, \ldots, \mu$ *annehmen, für die durch* (102.) *und* (105.) *bezeichneten Anfangswerthe von Null verschieden ist,*

so besitzt das partielle Differentialgleichungsystem (99.) *ein und nur ein Integralsystem* $u_1, u_2, \ldots, u_m$, *welches in der Umgebung der Werthe* $z_1 = a_1, \ldots, z_\mu = a_\mu$ *den Charakter von ganzen Functionen hat und für die durch die Gleichung* (100.) *gegebene Beziehung zwischen den unabhängigen Variabeln die vorgeschriebenen Functionalwerthe* (101.) *annimmt.*

Wir wollen endlich diesen Fundamentalsatz von der Existenz und Natur der Integrale partieller Differentialgleichungssysteme noch in einer dritten Form aussprechen, die sich in ganz analoger Weise wie die letztbehandelte ergiebt, wenn wir uns auf den von *Poincaré* aufgestellten Hülfssatz stützen,

dass, wenn eine Gleichung

$$(108.)\quad \theta(z_1, z_2, \ldots, z_\mu) = A$$

durch ein Werthesystem $z_1 = a_1, z_2 = a_2, \ldots, z_\mu = a_\mu$ befriedigt wird, in dessen Umgebung $\theta(z_1, z_2, \ldots, z_\mu)$ den Charakter einer ganzen Function

besitzt, der Gleichung (108.) identisch genügt werden kann durch die μ Ausdrücke

$$(109.)\quad \begin{cases} z_1 - a_1 = \mathfrak{a}_1(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}), \\ z_2 - a_2 = \mathfrak{a}_2(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}), \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_\mu - a_\mu = \mathfrak{a}_\mu(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}), \end{cases}$$

worin $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}$ von einander unabhängige Veränderliche und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\mu$ mit den Nullwerthen dieser Veränderlichen zugleich verschwindende Functionen algebraischen Charakters sind, d. h. Lösungen von algebraischen Gleichungen der Form

$$(110.)\quad \mathfrak{a}^n + \mathfrak{g}_1(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1})\mathfrak{a}^{n-1} + \cdots + \mathfrak{g}_n(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}) = 0,$$

worin $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n$ mit $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}$ zugleich verschwindende Functionen dieser Variabeln vom Charakter der ganzen Functionen sind.

Dann lautet, wie unmittelbar zu sehen, das Fundamentaltheorem folgendermassen:

Sei ein partielles Differentialgleichungssystem erster Ordnung und m ter Klasse gegeben

$$(111.)\quad \begin{cases} F_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\right) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ F_m\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\right) = 0, \end{cases}$$

in welchem $F_1, \ldots, F_m$ beliebige Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, und werde verlangt, ein Integralsystem zu finden, welches für

$$(112.)\quad \begin{cases} z_1 = \mathfrak{a}_1(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}), \quad z_2 = \mathfrak{a}_2(\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{\mu-1}), \quad \ldots, \\ z = \mathfrak{a}_\mu(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}), \end{cases}$$

worin $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\mu$ willkürliche Functionen der Variabeln $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}$ bedeuten, die Werthe annimmt

$$(113.)\quad \begin{cases} u_1 = \mathfrak{A}_1(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}), \quad u_2 = \mathfrak{A}_2(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}), \quad \ldots, \\ u_m = \mathfrak{A}_m(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}), \end{cases}$$

worin $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$ wiederum willkürliche Functionen derselben Variabeln darstellen, so kann man in Betreff der Existenz und Natur eines solchen Integralsystems den folgenden Satz aussprechen: Greift man irgend ein Werthesystem $n_1, n_2, \ldots, n_{\mu-1}$ der Variabeln $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\mu-1}$ heraus von der Eigenschaft, dass

1) *die Functionen* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\mu, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$ *in der Umgebung dieser Werthe den Charakter von algebraischen Functionen haben, welche für* $n_1, n_2, \ldots, n_\mu$ *die Werthe* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu, A_1, A_2, \ldots, A_m$ *annehmen mögen,*

2) *mindestens eine der aus* $\mu-1$ *Reihen zusammengestellten Determinanten der Grössen*

$$\begin{matrix} \frac{\partial \mathfrak{a}_1}{\partial \nu_1} & \frac{\partial \mathfrak{a}_1}{\partial \nu_2} & \cdots & \frac{\partial \mathfrak{a}_1}{\partial \nu_{\mu-1}} \\ \frac{\partial \mathfrak{a}_2}{\partial \nu_1} & \frac{\partial \mathfrak{a}_2}{\partial \nu_2} & \cdots & \frac{\partial \mathfrak{a}_2}{\partial \nu_{\mu-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \mathfrak{a}_\mu}{\partial \nu_1} & \frac{\partial \mathfrak{a}_\mu}{\partial \nu_2} & \cdots & \frac{\partial \mathfrak{a}_\mu}{\partial \nu_{\mu-1}} \end{matrix}$$

für das Werthesystem $n_1, n_2, \ldots, n_{\mu-1}$ *von Null verschieden ist,*

3) *die linken Seiten der partiellen Differentialgleichungen* (111.) *in der Umgebung der Anfangswerthe*

$$(114.)\quad z_1 = \mathfrak{a}_1(n_1, \ldots, n_{\mu-1}) = \alpha_1, \quad \ldots, \quad z_\mu = \mathfrak{a}_\mu(n_1, \ldots, n_{\mu-1}) = \alpha_\mu,$$

$$(115.)\quad u_1 = \mathfrak{A}_1(n_1, \ldots, n_{\mu-1}) = \beta_1, \quad \ldots, \quad u_m = \mathfrak{A}_m(n_1, \ldots, n_{\mu-1}) = \beta_m$$

und der aus den $m\mu$ *Gleichungen*

$$(116.)\left\{\begin{array}{l} F_1\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu, \beta_1, \ldots, \beta_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\right) = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ F_m\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu, \beta_1, \ldots, \beta_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\right) = 0, \\ \frac{\partial u_\varrho}{\partial z_1}\frac{\partial \mathfrak{a}_1}{\partial \nu_1} + \frac{\partial u_\varrho}{\partial z_2}\frac{\partial \mathfrak{a}_2}{\partial \nu_1} + \cdots + \frac{\partial u_\varrho}{\partial z_\mu}\frac{\partial \mathfrak{a}_\mu}{\partial \nu_1} = \frac{\partial \mathfrak{A}_\varrho}{\partial \nu_1}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \quad (\text{für } \varrho = 1, 2, \ldots, m) \\ \frac{\partial u_\varrho}{\partial z_1}\frac{\partial \mathfrak{a}_1}{\partial \nu_{\mu-1}} + \frac{\partial u_\varrho}{\partial z_2}\frac{\partial \mathfrak{a}_2}{\partial \nu_{\mu-1}} + \cdots + \frac{\partial u_\varrho}{\partial z_\mu}\frac{\partial \mathfrak{a}_\mu}{\partial \nu_{\mu-1}} = \frac{\partial \mathfrak{A}_\varrho}{\partial \nu_{\mu-1}} \end{array}\right.$$

bestimmten Anfangswerthe der partiellen Ableitungen, die wir mit

$$(117.)\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial u_\varrho}{\partial z_1} = \varphi_{\varrho 1}(n_1, n_2, \ldots, n_{\mu-1}), \quad \frac{\partial u_\varrho}{\partial z_2} = \varphi_{\varrho 2}(n_1, n_2, \ldots, n_{\mu-1}), \quad \ldots, \\ \qquad \frac{\partial u_\varrho}{\partial z_\mu} = \varphi_{\varrho\mu}(n_1, n_2, \ldots, n_{\mu-1}) \end{array}\right.$$

bezeichnen wollen, den Charakter von ganzen Functionen haben, sich also nach ganzen, positiven, steigenden Potenzen von

$$z_1-\alpha_1, \quad \ldots, \quad z_\mu-\alpha_\mu, \quad u_1-\beta_1, \quad \ldots, \quad u_m-\beta_m,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_1}-\varphi_{11}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}-\varphi_{1\mu}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_1}-\varphi_{m1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}-\varphi_{m\mu}$$

entwickeln lassen, endlich

4) *die Determinante*

$$(118.)\quad D_4 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_1}} \vartheta_1 + \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_2}} \vartheta_2 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}} \vartheta_\mu, & \ldots, & \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_1}} \vartheta_1 + \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_2}} \vartheta_2 + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}} \vartheta_\mu \\ \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_1}} \vartheta_1 + \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_2}} \vartheta_2 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_\mu}} \vartheta_\mu, & \ldots, & \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_1}} \vartheta_1 + \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_2}} \vartheta_2 + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_2}{\partial z_\mu}} \vartheta_\mu \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_1}} \vartheta_1 + \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_2}} \vartheta_2 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}} \vartheta_\mu, & \ldots, & \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_1}} \vartheta_1 + \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_2}} \vartheta_2 + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}} \vartheta_\mu \end{vmatrix},$$

worin

$$(119.)\quad \vartheta_\lambda = (-1)^{\lambda-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathfrak{a}_1}{\partial v_1} & \frac{\partial \mathfrak{a}_1}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial \mathfrak{a}_1}{\partial v_{\mu-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \mathfrak{a}_{\lambda-1}}{\partial v_1} & \frac{\partial \mathfrak{a}_{\lambda-1}}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial \mathfrak{a}_{\lambda-1}}{\partial v_{\mu-1}} \\ \frac{\partial \mathfrak{a}_{\lambda+1}}{\partial v_1} & \frac{\partial \mathfrak{a}_{\lambda+1}}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial \mathfrak{a}_{\lambda+1}}{\partial v_{\mu-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \mathfrak{a}_\mu}{\partial v_1} & \frac{\partial \mathfrak{a}_\mu}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial \mathfrak{a}_\mu}{\partial v_{\mu-1}} \end{vmatrix}$$

für die durch (114.), (115.) *und* (117.) *bezeichneten Anfangswerthe von Null verschieden ist, so besitzt das partielle Differentialgleichungssystem* (111.) *ein und nur ein Integralsystem* $u_1, u_2, \ldots, u_m$, *welches in der Umgebung der Werthe* $z_1 = \alpha_1$, $z_2 = \alpha_2$, $\ldots$, $z_\mu = \alpha_\mu$ *den Charakter von ganzen Functionen hat und für die durch* (112.) *gegebenen Beziehungen zu* $\mu - 1$ *unabhängigen Variabeln in die durch die Gleichungen* (113.) *gegebenen Functionen algebraischen Charakters derselben Variabeln übergeht.*

Die so sich ergebenden Integralelemente des partiellen Differentialgleichungssystems $m$ter Klasse mit μ unabhängigen Variabeln enthalten somit m willkürliche Functionen von $\mu - 1$ Variabelnverbindungen.

3. Singuläre Integralsysteme von partiellen Differentialgleichungssystemen beliebiger Klasse.

Die oben vorgenommene Reduction eines beliebigen partiellen Differentialgleichungssystems (2.) auf die *Weierstrass*sche Normalform (6.), (7.) ist bekanntlich nur dann ausführbar, wenn nicht für die Lösung t_1 der Gleichung

$$(120.)\quad G\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, t_1\right) = 0$$

auch zugleich die Gleichung

$$(121.)\qquad \frac{\partial G\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, t_1\right)}{\partial t_1} = 0$$

befriedigt wird, welche Voraussetzung als erfüllt angenommen werden durfte, so lange sämmtliche Variabeln als von einander unabhängig betrachtet wurden. Aber es könnte das gegebene partielle Differentialgleichungsystem ein Integralsystem $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m$ besitzen, für welches die beiden Gleichungen

$$(122.)\qquad \begin{cases} G\left(z_1, \ldots, z_\mu, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m, \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial z_2}, \ldots, t_1\right) = 0, \\ \frac{\partial G\left(z_1, \ldots, z_\mu, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m, \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial z_2}, \ldots, t_1\right)}{\partial t_1} = 0 \end{cases}$$

zugleich erfüllt wären, und wir wollen *ein Integralsystem* $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m$, *welches den beiden Gleichungen* (122.) *genügt, ein* ***singuläres*** *Integralsystem der partiellen Differentialgleichungen* (2.) *nennen.*

Zur Auffindung der singulären Integralsysteme bemerke man zunächst, dass, wenn man t_1 zwischen den beiden Gleichungen (122.) eliminirt, sich eine stets herstellbare algebraische Beziehung ergiebt

$$(123.)\qquad \omega\left(z_1, \ldots, z_\mu, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m, \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial z_\mu}\right) = 0;$$

eliminirt man sodann aus dieser Gleichung und den Differentialgleichungen (2.) auf algebraischem Wege die Grösse $\frac{\partial \bar{u}_m}{\partial z_\mu}$, so werden $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m$ ein Integralsystem eines wieder auf die Normalform gebrachten partiellen Differentialgleichungsystems der Form sein

$$(124.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial H\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_{\mu-1}}, t_2\right)}{\partial t_2} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \\ = H_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_{\mu-1}}, t_2\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial H\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_{\mu-1}}, t_2\right)}{\partial t_2} \frac{\partial u_m}{\partial z_1} \\ = H_m\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_{\mu-1}}, t_2\right), \end{cases}$$

worin t_2 eine Lösung der Gleichung

$$(125.)\quad H\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_{\mu-1}}, t_2\right) = 0$$

ist.

Zur Bestimmung der singulären Integralelemente aus gegebenen willkürlichen Anfangsbedingungen wird man folgendermassen zu verfahren haben: man setze für $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ die zu $z_1 = a_1$ gehörigen willkürlichen Anfangswerthe

$$(126.)\quad u_1 = \psi_1(z_2, \ldots, z_\mu),\ u_2 = \psi_2(z_2, \ldots, z_\mu),\ \ldots,\ u_{m-1} = \psi_{m-1}(z_2, \ldots, z_\mu)$$

in die aus der Gleichung (123.) folgende Beziehung

$$(127.)\quad \left\{\begin{aligned} &\omega\Big(a_1, z_2, \ldots, z_\mu, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}, (u_m)_{a_1}, \\ &\qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial \psi_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial (u_m)_{a_1}}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial (u_m)_{a_1}}{\partial z_\mu}\Big) = 0 \end{aligned}\right.$$

ein; wählt man dann für $z_2 = a_2$ den Anfangswerth von $(u_m)_{a_1}$ als willkürliche Function von $z_3, \ldots, z_\mu$

$$(128.)\quad (u_m)_{a_1, a_2} = \chi(z_3, z_4, \ldots, z_\mu),$$

so wird sich durch Integration der Differentialgleichung (127.)

$$(129.)\quad (u_m)_{a_1} = \psi_m(z_2, z_3, \ldots, z_\mu)$$

ergeben. Mit Hülfe der Anfangswerthe (126.) und (129.) integrire man das System von Differentialgleichungen (124.); genügen die Integrale dann der Gleichung (123.), so ist das gefundene Functionalsystem auch ein Integralsystem der gegebenen Differentialgleichungen (2.). Es kann nun aber auch für das gesuchte singuläre Integralsystem die Gleichung (125.) gleiche Lösungen, also mit der Gleichung

$$(130.)\quad \frac{\partial H\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_{\mu-1}}, t_2\right)}{\partial t_2} = 0$$

eine Lösung gemein haben, dann würde die Elimination von $\frac{\partial u_m}{\partial z_{\mu-1}}$ zwischen (125.) und (130.) eine algebraische Beziehung der Form ergeben

$$(131.)\quad \omega_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_{\mu-1}}\right) = 0,$$

und man könnte vermöge (123.) und (131.) aus dem gegebenen Differentialgleichungsystem (2.) die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}, \frac{\partial u_m}{\partial z_{\mu-1}}$ herausschaffen und das neue Differentialgleichungsystem wieder auf die Normal-

form bringen, u. s. w. Immer führt die Bestimmung der singulären Integralelemente auf die Aufsuchung von Integralen für Differentialgleichungsysteme in der Normalform, bis wir sämmtliche Ableitungen von u_m eliminirt haben; die letzte den Gleichungen (123.), (131.), ... analoge algebraische Beziehung wird mit diesen uns gestatten, aus dem Differentialgleichungssysteme (2.) die Function u_m nebst ihren nach $z_1, z_2, \dots, z_\mu$ genommenen ersten Ableitungen zu eliminiren, und wir erhalten sodann ein partielles Differentialgleichungsystem erster Ordnung und $(m-1)$ter Klasse mit den $m-1$ abhängigen Variabeln $u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$; ist dieses integrirt, so ist vermöge der vorher gefundenen Beziehungen u_m algebraisch durch $u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$ und deren erste Ableitungen ausdrückbar. Fährt man in diesen Schlüssen fort, so ergiebt sich der Satz:

Die Bestimmung der singulären Integralelemente des partiellen Differentialgleichungsystems (2.) *führt auf dem angegebenen Wege entweder zu algebraischen Functionen von $z_1, z_2, \dots, z_\mu$ für die m Elemente $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m$ des singulären Integralsystems, oder sie erfordert die Auffindung eines Systems von nicht singulären Integralelementen eines partiellen Differentialgleichungsystems, in welchem weniger erste partielle Ableitungen der abhängigen Variabeln oder weniger abhängige Variable enthalten sind, wobei im letzteren Falle die übrigen Integralelemente algebraische Functionen der anderen und deren ersten partiellen Ableitungen sind; in allen Fällen muss nachträglich verificirt werden, dass die gefundenen Elemente auch wirklich ein System von Integralen des gegebenen Differentialgleichungsystems bilden.*

4. Ueber die durch Variation der Constanten herleitbaren Integrale von Systemen partieller Differentialgleichungen beliebiger Klasse.

Da die partiellen Differentialgleichungsysteme erster Klasse für die nachfolgenden Betrachtungen eine Ausnahmestellung einnehmen, so mögen diese zunächst besonders betrachtet werden.

Sei die partielle Differentialgleichung gegeben

$$(1.)\qquad f\left(z_1, z_2, \dots, z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_1}, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial z_\mu}\right) = 0,$$

in welcher $z_1, z_2, \dots, z_\mu$ unabhängige, u eine abhängige Variable bedeuten, *so soll eine Function*

$$(2.)\qquad u = F(z_1, z_2, \dots, z_\mu, a_1, a_2, \dots, a_\mu),$$

in welcher $a_1, a_2, \dots, a_\mu$ willkürliche Constanten vorstellen, ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung (1.) *genannt werden, wenn u, sowie*

dem Elemente $\frac{\partial^2 F}{\partial z_\sigma \partial a_\varrho}$ gehörige, so werden sich aus den Gleichungen

$$(8.)\quad p_1 = \frac{\partial F}{\partial z_1},\ \dots,\ p_{\sigma-1} = \frac{\partial F}{\partial z_{\sigma-1}},\ p_{\sigma+1} = \frac{\partial F}{\partial z_{\sigma+1}},\ \dots,\ p_\mu = \frac{\partial F}{\partial z_\mu}$$

die Werthe von $a_1, a_2, \dots, a_{\varrho-1}, a_{\varrho+1}, \dots, a_\mu$ als Functionen von $p_1, \dots, p_{\sigma-1}, p_{\sigma+1}, \dots, p_\mu, z_1, \dots, z_\mu, a_\varrho$ ergeben und in die Gleichung

$$(9.)\qquad p_\sigma = \frac{\partial F}{\partial z_\sigma}$$

eingesetzt, da a_ϱ vermöge des Verschwindens von D von selbst herausfallen muss, in der That eine die Grösse u nicht enthaltende partielle Differentialgleichung liefern. Andererseits ist aber nothwendig, dass, wenn man die aus (8.) ermittelten Werthe von $a_1, a_2, \dots, a_{\varrho-1}, a_{\varrho+1}, \dots, a_\mu$ in die Gleichung (2.) einsetzt, a_ϱ nicht herausfällt, weil sich sonst noch eine zweite, u enthaltende, also von der ersten verschiedene Differentialgleichung gegen die Voraussetzung der Eigenschaft des vollständigen Integrales ergeben würde; es darf daher die Determinante

$$(10.)\quad D_\sigma = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial a_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_1} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma-1} \partial a_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma+1} \partial a_1} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_\mu \partial a_1} \\ \frac{\partial F}{\partial a_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma-1} \partial a_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma+1} \partial a_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_\mu \partial a_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F}{\partial a_\mu} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_\mu} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma-1} \partial a_\mu} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma+1} \partial a_\mu} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_\mu \partial a_\mu} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwinden. Ist nun umgekehrt die Determinante D identisch Null und eine, z. B. die zu dem Elemente $\frac{\partial^2 F}{\partial z_\sigma \partial a_\varrho}$ gehörige, Unterdeterminante erster Ordnung von Null verschieden, so ergiebt sich zunächst, wie eben gezeigt worden, eine u nicht enthaltende partielle Differentialgleichung, von welcher (2.) für willkürliche Werthe der Constanten $a_1, a_2, \dots, a_\mu$ ein Integral ist, aber es lässt sich auch zeigen, dass keine andere Differentialgleichung existirt, von welcher u ein Integral ist. Denn gäbe es noch eine Differentialgleichung

$$(11.)\qquad f_1(z_1, z_2, \dots, z_\mu, u, p_1, p_2, \dots, p_\mu) = 0,$$

so würde in dieser entweder schon an sich der partielle Differentialquotient p_σ fehlen, oder, wenn derselbe in ihr vorkommt, so liesse sich dieser aus (11.) und der eben gefundenen

$$(12.)\qquad f(z_1, z_2, \dots, z_\mu, p_1, p_2, \dots, p_\mu) = 0$$

eliminiren, und es ergäbe sich für eben diese Function u eine partielle Differentialgleichung der Form

$$(13.)\quad f_2(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_\mu,\ u,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_{\sigma-1},\ p_{\sigma+1},\ \ldots,\ p_\mu) = 0;$$

stellen wir aber die Gleichungen zusammen

$$(14.)\quad \begin{cases} u = F,\quad p_1 = \dfrac{\partial F}{\partial z_1},\ p_2 = \dfrac{\partial F}{\partial z_2},\ \ldots, \\ p_{\sigma-1} = \dfrac{\partial F}{\partial z_{\sigma-1}},\ p_{\sigma+1} = \dfrac{\partial F}{\partial z_{\sigma+1}},\ \ldots,\ p_\mu = \dfrac{\partial F}{\partial z_\mu}, \end{cases}$$

so würde die von $a_1, \ldots, a_\mu$ freie Beziehung (13.) verlangen, dass D_σ identisch verschwindet; da dies nun nicht der Fall sein sollte, so kann also auch keine andere partielle Differentialgleichung als die zuerst oben gefundene, u nicht enthaltende Differentialgleichung existiren, von welcher u ebenfalls ein Integral ist.

Fassen wir die eben gefundenen Resultate zusammen, so ergiebt sich der folgende Satz:

Ist eine partielle Differentialgleichung

$$f\left(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_\mu\ u,\ \frac{\partial u}{\partial z_1},\ \frac{\partial u}{\partial z_2},\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial z_\mu}\right) = 0$$

gegeben, in welcher u selbst enthalten ist, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Function

$$u = F(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_\mu,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\mu),$$

welche nebst ihren partiellen Differentialquotienten in die partielle Differentialgleichung eingesetzt derselben für beliebige Werthe der μ Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ Genüge leistet, ein vollständiges Integral ist, die, dass die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial a_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_\mu \partial a_1} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial a_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_\mu \partial a_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_\mu} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial a_\mu} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_\mu \partial a_\mu} \end{vmatrix}$$

nicht identisch Null ist. Hat die partielle Differentialgleichung jedoch die Form

$$f\left(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_\mu,\ \frac{\partial u}{\partial z_1},\ \frac{\partial u}{\partial z_2},\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial z_\mu}\right) = 0,$$

in welcher u selbst nicht vorkommt, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Vollständigkeit des Integrales, dass D identisch gleich Null

ist, dass ferner eine der Unterdeterminanten erster Ordnung

$$D_{\sigma\varrho} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma-1} \partial a_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma+1} \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_\mu \partial a_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_{\varrho-1}} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma-1} \partial a_{\varrho-1}} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma+1} \partial a_{\varrho-1}} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_\mu \partial a_{\varrho-1}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_{\varrho+1}} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma-1} \partial a_{\varrho+1}} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma+1} \partial a_{\varrho+1}} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_\mu \partial a_{\varrho+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_\mu} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma-1} \partial a_\mu} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma+1} \partial a_\mu} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_\mu \partial a_\mu} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden, und ebenso die Determinante

$$D_\sigma = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma-1} \partial a_1} & \frac{\partial F}{\partial a_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma+1} \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_\mu \partial a_1} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma-1} \partial a_2} & \frac{\partial F}{\partial a_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma+1} \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_\mu \partial a_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial a_\mu} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma-1} \partial a_\mu} & \frac{\partial F}{\partial a_\mu} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_{\sigma+1} \partial a_\mu} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial z_\mu \partial a_\mu} \end{vmatrix}$$

nicht identisch Null ist.

Sei nun

$$(15.) \qquad u = F(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, a_1, a_2, \ldots, a_\mu)$$

das vollständige Integral der partiellen Differentialgleichung

$$(16.) \qquad f\left(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_1}, \frac{\partial u}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial z_\mu}\right) = 0,$$

welche somit nach dem Vorigen allein durch die Gleichung (15.) befriedigt wird und aus den in den Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ nicht identisch von einander abhängigen Gleichungen

$$(17.) \qquad \frac{\partial u}{\partial z_1} = \frac{\partial F}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial z_2} = \frac{\partial F}{\partial z_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial z_\mu} = \frac{\partial F}{\partial z_\mu}$$

durch Einsetzen der aus diesen hergeleiteten Werthe von $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ in Gleichung (15.) hervorgeht. Zunächst ist leicht ersichtlich, dass man unendlich viele neue Integrale der Differentialgleichung (16.) angeben kann, welche sämmtlich die Form der Integrale (15.) haben, in denen jedoch die Grössen $a_1, \ldots, a_\mu$ nunmehr variabel sein werden; denn da sich unter dieser Voraussetzung durch partielle Differentiation nach $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ die

Gleichungen ergeben

$$(18.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z_1} = \dfrac{\partial F}{\partial z_1} + \dfrac{\partial F}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial z_1} + \dfrac{\partial F}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial z_1} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial a_\mu}\dfrac{\partial a_\mu}{\partial z_1}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\partial u}{\partial z_\mu} = \dfrac{\partial F}{\partial z_\mu} + \dfrac{\partial F}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial z_\mu} + \dfrac{\partial F}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial z_\mu} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial a_\mu}\dfrac{\partial a_\mu}{\partial z_\mu}, \end{cases}$$

so wird, wenn die $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ so als Functionen von $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ bestimmt werden, dass den Gleichungen

$$(19.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial z_1} + \dfrac{\partial F}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial z_1} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial a_\mu}\dfrac{\partial a_\mu}{\partial z_1} = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial z_\mu} + \dfrac{\partial F}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial z_\mu} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial a_\mu}\dfrac{\partial a_\mu}{\partial z_\mu} = 0 \end{cases}$$

genügt wird, das System (18.) in (17.) übergehen, und also wiederum die Elimination von $a_1, \ldots, a_\mu$ zwischen (15.) und (18.) die Differentialgleichung (16.) liefern. Die Gleichungen (19.) liefern aber entweder die zur Bestimmung von $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ als Functionen von $z_1, \ldots, z_\mu$ hinreichenden Gleichungen

$$(20.)\qquad \frac{\partial F}{\partial a_1} = 0,\quad \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0,\quad \ldots,\quad \frac{\partial F}{\partial a_\mu} = 0,$$

oder es ist die Functionaldeterminante der $a_1, \ldots, a_\mu$ in Bezug auf $z_1, \ldots, z_\mu$

$$(21.)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial a_2}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial a_\mu}{\partial z_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial z_\mu} & \dfrac{\partial a_2}{\partial z_\mu} & \cdots & \dfrac{\partial a_\mu}{\partial z_\mu} \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. es ist

$$(22.)\qquad \varphi_0(a_1, a_2, \ldots, a_{\mu-1}, a_\mu) = 0,$$

worin φ_0 eine willkürliche Function bedeutet. Leitet man durch Differentiation nach z_α hieraus

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial z_\alpha} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial z_\alpha} + \cdots + \frac{\partial \varphi_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial a_\mu}{\partial z_\alpha} = 0$$

ab und benutzt diese Beziehung für die μ Gleichungen des Systemes (19.), so erhält man

$$(23.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_\mu}-\frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_1}\right)\frac{\partial a_1}{\partial z_1}+\left(\frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_\mu}-\frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_2}\right)\frac{\partial a_2}{\partial z_1}+\cdots \\ \qquad \cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial a_{\mu-1}}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_\mu}-\frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_{\mu-1}}\right)\frac{\partial a_{\mu-1}}{\partial z_1}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_\mu}-\frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_1}\right)\frac{\partial a_1}{\partial z_\mu}+\left(\frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_\mu}-\frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_2}\right)\frac{\partial a_2}{\partial z_\mu}+\cdots \\ \qquad \cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial a_{\mu-1}}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_\mu}-\frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_{\mu-1}}\right)\frac{\partial a_{\mu-1}}{\partial z_\mu}=0, \end{cases}$$

und hieraus folgt entweder, dass die $a_1, a_2, \dots, a_{\mu-1}, a_\mu$ der Gleichung (22.) und den $\mu-1$ Gleichungen

$$(24.)\quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_\mu}-\frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_1}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_\mu}-\frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_2}=0,\quad \dots, \\ \qquad \frac{\partial F}{\partial a_{\mu-1}}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_\mu}-\frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial \varphi_0}{\partial a_{\mu-1}}=0 \end{cases}$$

genügen, aus denen die Werthe $a_1, a_2, \dots, a_\mu$ als Functionen von $z_1, z_2, \dots, z_\mu$ sich ergeben, die, in die Gleichung (15.) eingesetzt, eine Integralgleichung von (16.) liefern, welche, da a_μ aus (22.) als willkürliche Function von $a_1, a_2, \dots, a_{\mu-1}$ sich ergiebt, *eine* willkürliche Function von $\mu-1$ Variabelnverbindungen $a_1, a_2, \dots, a_{\mu-1}$ enthält, oder es ist nach (23.) die Functionaldeterminante der Form

$$(25.)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial z_{\alpha_1}} & \frac{\partial a_2}{\partial z_{\alpha_1}} & \cdots & \frac{\partial a_{\mu-1}}{\partial z_{\alpha_1}} \\ \frac{\partial a_1}{\partial z_{\alpha_2}} & \frac{\partial a_2}{\partial z_{\alpha_2}} & \cdots & \frac{\partial a_{\mu-1}}{\partial z_{\alpha_2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial a_1}{\partial z_{\alpha_{\mu-1}}} & \frac{\partial a_2}{\partial z_{\alpha_{\mu-1}}} & \cdots & \frac{\partial a_{\mu-1}}{\partial z_{\alpha_{\mu-1}}} \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher die Indices $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mu-1}$ jede Combination der Zahlen $1, 2, \dots, \mu$ zur $(\mu-1)$ten Klasse bedeuten, und woraus sich eine Beziehung unter den $a_1, a_2, \dots, a_{\mu-1}$ selbst ergiebt, während umgekehrt die Existenz einer solchen Beziehung

$$(26.)\qquad \varphi_1(a_1, a_2, \dots, a_{\mu-2}, a_{\mu-1}) = 0,$$

worin φ_1 eine willkürliche Function bedeutet, die Gleichungen (25.) befriedigt. Bringt man die Gleichungen (22.) und (26.) auf die Form

$$(27.)\quad \psi_0(a_1, a_2, \dots, a_{\mu-2}, a_\mu)=0,\quad \psi_1(a_1, a_2, \dots, a_{\mu-2}, a_{\mu-1})=0,$$

worin ψ_0 und ψ_1 wiederum willkürliche Functionen bedeuten, leitet aus diesen durch Differentiation nach z_α die Beziehungen

$$(28.)\quad \frac{\partial\psi_0}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial z_\alpha}+\frac{\partial\psi_0}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial z_\alpha}+\cdots+\frac{\partial\psi_0}{\partial a_{\mu-2}}\frac{\partial a_{\mu-2}}{\partial z_\alpha}+\frac{\partial\psi_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial a_\mu}{\partial z_\alpha}=0$$

und

$$(29.)\quad \frac{\partial\psi_1}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial z_\alpha}+\frac{\partial\psi_1}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial z_\alpha}+\cdots+\frac{\partial\psi_1}{\partial a_{\mu-2}}\frac{\partial a_{\mu-2}}{\partial z_\alpha}+\frac{\partial\psi_1}{\partial a_{\mu-1}}\frac{\partial a_{\mu-1}}{\partial z_\alpha}=0$$

ab und benutzt dieselben für die μ Gleichungen des Systemes (19.), so erhält man

$$(30.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial\psi_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial a_{\mu-1}}-\frac{\partial F}{\partial a_{\mu-1}}\frac{\partial\psi_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial a_1}-\frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial a_{\mu-1}}\frac{\partial\psi_0}{\partial a_1}\right)\frac{\partial a_1}{\partial z_\alpha} \\ +\left(\frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial\psi_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial a_{\mu-1}}-\frac{\partial F}{\partial a_{\mu-1}}\frac{\partial\psi_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial a_2}-\frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial a_{\mu-1}}\frac{\partial\psi_0}{\partial a_2}\right)\frac{\partial a_2}{\partial z_\alpha} \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +\left(\frac{\partial F}{\partial a_{\mu-2}}\frac{\partial\psi_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial a_{\mu-1}}-\frac{\partial F}{\partial a_{\mu-1}}\frac{\partial\psi_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial a_{\mu-2}}-\frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial a_{\mu-1}}\frac{\partial\psi_0}{\partial a_{\mu-2}}\right)\frac{\partial a_{\mu-2}}{\partial z_\alpha}=0. \end{cases}$$

für $\alpha = 1, 2, \ldots, \mu$, und hieraus ergiebt sich wieder, dass entweder

$$(31.)\quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial\psi_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial a_{\mu-1}}-\frac{\partial F}{\partial a_{\mu-1}}\frac{\partial\psi_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial a_1}-\frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial a_{\mu-1}}\frac{\partial\psi_0}{\partial a_1}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F}{\partial a_{\mu-2}}\frac{\partial\psi_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial a_{\mu-1}}-\frac{\partial F}{\partial a_{\mu-1}}\frac{\partial\psi_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial a_{\mu-2}}-\frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial a_{\mu-1}}\frac{\partial\psi_0}{\partial a_{\mu-2}}=0 \end{cases}$$

ist, woraus in Verbindung mit (27.) sich die Werthe von $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ als Functionen von $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ ergeben, die, in die Gleichung (15.) eingesetzt, eine Integralgleichung von (16.) liefern, welche zwei willkürliche Functionen von $\mu-2$ Variabelnverbindungen $a_1, a_2, \ldots, a_{\mu-2}$ enthält, oder es muss wieder die Functionaldeterminante

$$(32.)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial z_{\alpha_1}} & \frac{\partial a_2}{\partial z_{\alpha_1}} & \cdots & \frac{\partial a_{\mu-2}}{\partial z_{\alpha_1}} \\ \frac{\partial a_1}{\partial z_{\alpha_2}} & \frac{\partial a_2}{\partial z_{\alpha_2}} & \cdots & \frac{\partial a_{\mu-2}}{\partial z_{\alpha_2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial a_1}{\partial z_{\alpha_{\mu-2}}} & \frac{\partial a_2}{\partial z_{\alpha_{\mu-2}}} & \cdots & \frac{\partial a_{\mu-2}}{\partial z_{\alpha_{\mu-2}}} \end{vmatrix} = 0$$

sein, worin die Indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mu-2}$ jede Combination der Zahlen 1, 2, ..., μ zur $(\mu-2)$ten Klasse bedeuten.

Schliesst man so weiter, so erhält man den folgenden Satz:

Ist das vollständige Integral (15.) *einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung* (16.) *bekannt, so kann man aus demselben durch Variation der Constanten eine Reihe anderer Integrale ableiten, von denen eines durch Bestimmung der Grössen* $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ *aus den Gleichungen*

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial a_2}=0,\quad \ldots,\quad \frac{\partial F}{\partial a_\mu}=0$$

hervorgeht, die anderen dadurch erhalten werden, dass man für $\lambda = 1, 2, \ldots, \mu-1$

$$\omega_0(a_1, a_2, \ldots, a_{\mu-\lambda}, a_\mu) = 0,$$
$$\omega_1(a_1, a_2, \ldots, a_{\mu-\lambda}, a_{\mu-1}) = 0, \ldots, \omega_{\lambda-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{\mu-\lambda}, a_{\mu-\lambda+1}) = 0$$

setzt, worin $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\lambda-1}$ *willkürliche Functionen bedeuten, aus diesen* λ *Gleichungen sowie aus den folgenden* $\mu-\lambda$ *Gleichungen*

$$(33.)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial \omega_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial \omega_1}{\partial a_{\mu-1}}\cdots\frac{\partial \omega_{\lambda-1}}{\partial a_{\mu-\lambda+1}} - \frac{\partial F}{\partial a_{\mu-\lambda+1}}\frac{\partial \omega_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial \omega_1}{\partial a_{\mu-1}}\cdots\frac{\partial \omega_{\lambda-2}}{\partial a_{\mu-\lambda+2}}\frac{\partial \omega_{\lambda-1}}{\partial a_1}\\
&\qquad - \frac{\partial F}{\partial a_{\mu-\lambda+2}}\frac{\partial \omega_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial \omega_1}{\partial a_{\mu-1}}\cdots\frac{\partial \omega_{\lambda-1}}{\partial a_{\mu-\lambda+1}}\frac{\partial \omega_{\lambda-2}}{\partial a_1}\\
&\qquad - \cdots\cdots\\
&\qquad - \frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial \omega_1}{\partial a_{\mu-1}}\frac{\partial \omega_2}{\partial a_{\mu-2}}\cdots\frac{\partial \omega_{\lambda-1}}{\partial a_{\mu-\lambda+1}}\frac{\partial \omega_0}{\partial a_1} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial F}{\partial a_{\mu-\lambda}}\frac{\partial \omega_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial \omega_1}{\partial a_{\mu-1}}\cdots\frac{\partial \omega_{\lambda-1}}{\partial a_{\mu-\lambda+1}} - \frac{\partial F}{\partial a_{\mu-\lambda+1}}\frac{\partial \omega_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial \omega_1}{\partial a_{\mu-1}}\cdots\frac{\partial \omega_{\lambda-2}}{\partial a_{\mu-\lambda+2}}\frac{\partial \omega_{\lambda-1}}{\partial a_{\mu-\lambda}}\\
&\qquad - \frac{\partial F}{\partial a_{\mu-\lambda+2}}\frac{\partial \omega_0}{\partial a_\mu}\frac{\partial \omega_1}{\partial a_{\mu-1}}\cdots\frac{\partial \omega_{\lambda-1}}{\partial a_{\mu-\lambda+1}}\frac{\partial \omega_{\lambda-2}}{\partial a_{\mu-\lambda}}\\
&\qquad - \cdots\cdots\\
&\qquad - \frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial \omega_1}{\partial a_{\mu-1}}\frac{\partial \omega_2}{\partial a_{\mu-2}}\cdots\frac{\partial \omega_{\lambda-1}}{\partial a_{\mu-\lambda+1}}\frac{\partial \omega_0}{\partial a_{\mu-\lambda}} = 0
\end{aligned}\right.$$

die Werthe von $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ *berechnet, welche* λ *willkürliche Functionen von* $\mu-\lambda$ *Variabelnverbindungen enthalten werden, und in die Gleichung* (15.) *einsetzt — und andere Integrale als diese durch Variation der Constanten erhaltenen besitzt die partielle Differentialgleichung* (16.) *überhaupt nicht.*

Um die letztere Behauptung zu erweisen, werde zunächst bemerkt, dass, wenn ein beliebiges anderes Integral der Differentialgleichung (16.) vorgelegt ist

$$(34.)\qquad u = \chi(z_1, z_2, \ldots, z_\mu),$$

bei willkürlicher Bestimmung von $a_2, a_3, \ldots, a_\mu$ stets a_1 durch Identificirung von (15.) und (34.) so wird bestimmt werden können, dass das vollständige Integral durch diese Variation der Constanten auch das beliebig vorgelegte umfassen wird; bestimmt man nun die Grössen $a_2, a_3, \ldots, a_\mu$ derart, dass die $\mu-1$ partiellen Differentialgleichungen

$$(35.)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial z_1} + \frac{\partial F}{\partial a_3}\frac{\partial a_3}{\partial z_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial a_\mu}{\partial z_1} = -\frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial z_1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial z_{\mu-1}} + \frac{\partial F}{\partial a_3}\frac{\partial a_3}{\partial z_{\mu-1}} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_\mu}\frac{\partial a_\mu}{\partial z_{\mu-1}} = -\frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial z_{\mu-1}}
\end{aligned}\right.$$

diges Integralsystem des partiellen Differentialgleichungssystems (36.) *genannt werden, wenn* $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *sowie die aus* (37.) *hergeleiteten partiellen Differentialquotienten* $\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_\alpha}$, *in* (36.) *eingesetzt, diese Gleichungen identisch für alle Werthe von* $a_{11}, \ldots, a_{m\mu}$ *befriedigen, und die Integralfunctionen* (37.) *nicht noch einem anderen, dem Systeme* (36.) *algebraisch nicht äquivalenten, partiellen Differentialgleichungssystem erster Ordnung und m ter Klasse für willkürliche Werthe der Constanten* $a_{11}, \ldots, a_{m\mu}$ *Genüge leisten.*

Sollen nun die a aus den $m\mu$ Gleichungen

$$(38.)\quad \frac{\partial u_1}{\partial z_1} = \frac{\partial F_1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu} = \frac{\partial F_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_1} = \frac{\partial F_m}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu} = \frac{\partial F_m}{\partial z_\mu}$$

ausgerechnet und, in das Gleichungsystem (37.) eingesetzt, das Differentialgleichungsystem (36.) oder ein algebraisch äquivalentes liefern, so darf die Functionaldeterminante

$$(39.)\quad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{11}} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_2 \partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_\mu \partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{11}} & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_2 \partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_\mu \partial a_{11}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{1\mu}} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_2 \partial a_{1\mu}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_\mu \partial a_{1\mu}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{1\mu}} & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_2 \partial a_{1\mu}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_\mu \partial a_{1\mu}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1 \partial a_{m\mu}} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_2 \partial a_{m\mu}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_\mu \partial a_{m\mu}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_1 \partial a_{m\mu}} & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_2 \partial a_{m\mu}} & \cdots & \frac{\partial^2 F_m}{\partial z_\mu \partial a_{m\mu}} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwinden; fassen wir wieder die Grössen $a_{11}, \ldots, a_{1\mu}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu}$ als variabel auf, so ergeben sich aus (37.) durch Differentiation nach $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ die Gleichungen

$$(40.)\quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial z_a} = \frac{\partial F_1}{\partial z_a} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial z_a} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial a_{1\mu}}\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_a} + \cdots \\ \qquad \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial z_a} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial a_{m\mu}}\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial z_a} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad (\text{für } \alpha = 1, 2, \ldots, \mu) \\ \frac{\partial u_m}{\partial z_a} = \frac{\partial F_m}{\partial z_a} + \frac{\partial F_m}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial z_a} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial a_{1\mu}}\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_a} + \cdots \\ \qquad \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial z_a} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial a_{m\mu}}\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial z_a}, \end{cases}$$

und es soll zunächst gezeigt werden, dass alle Integralsysteme, welche das partielle Differentialgleichungssystem oder ein ihm algebraisch äquivalentes sonst noch hat, bestimmte Beziehungen zwischen den Grössen $a_{11}, \ldots, a_{m\mu}$

(37.) sich ergebenden Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$, da sie (37.), also auch (40.), und die Grössen a ausserdem den Gleichungen (44.) genügen, die Differentialbeziehungen befriedigen

$$(45.)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial z_\alpha}=\frac{\partial F_1}{\partial z_\alpha},\quad \frac{\partial u_2}{\partial z_\alpha}=\frac{\partial F_2}{\partial z_\alpha},\quad \ldots,\quad \frac{\partial u_m}{\partial z_\alpha}=\frac{\partial F_m}{\partial z_\alpha},$$

worin α die Werthe $1, 2, \ldots, \mu-1$ annimmt. Nun sollte aber das Functionalsystem (43.) ein Integralsystem der Differentialgleichungen (36.) darstellen, welche entstanden waren durch Ausrechnung von $a_{11}, \ldots, a_{1\mu}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu}$ aus den Gleichungen (37.) und (41.) und durch Einsetzen in die m Gleichungen (42.); es ist aber das System (37.) mit (43.) und (41.) mit (45.) identisch, und es drücken sich somit die Werthe sämmtlicher Grössen $a_{11}, \ldots, a_{1\mu}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu}$ ebenso durch $z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_{\mu-1}}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_{\mu-1}}$ aus wie für den Fall des vollständigen Integralsystems, sie müssen also, weil (43.) ein Integralsystem bilden sollte, in die Gleichungen (40.) für $\alpha=\mu$ eingesetzt dasselbe Differentialgleichungsystem (36.) liefern, und es werden daher auch die Beziehungen gelten

$$(46.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial z_\mu}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial a_{1\mu}}\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_\mu}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial z_\mu}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial a_{m\mu}}\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial z_\mu}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial z_\mu}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial a_{1\mu}}\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_\mu}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial z_\mu}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial a_{m\mu}}\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial z_\mu}=0. \end{cases}$$

Es ist somit erwiesen,

dass jedes Integralsystem des partiellen Differentialgleichungsystems $m$ter Klasse (36.) *aus dessen vollständigem Integralsystem* (37.) *durch Variation der Constanten abgeleitet werden kann, und zwar müssen die Functionalwerthe der Parameter $a_{11}, \ldots, a_{1\mu}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu}$ dem partiellen Differentialgleichungsystem $m\mu$ter Klasse genügen*

$$(47.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial z_\alpha}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial a_{1\mu}}\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_\alpha}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial z_\alpha}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial a_{m\mu}}\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial z_\alpha}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial z_\alpha}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial a_{1\mu}}\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_\alpha}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial z_\alpha}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial a_{m\mu}}\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial z_\alpha}=0, \end{cases}$$

worin α die Werthe $1, 2, \ldots, \mu$ annimmt.

Um also sämmtliche Integralsysteme der Differentialgleichungen (36.) *zu ermitteln, müssen die Differentialgleichungen* (47.) *mit den $m\mu$ abhängigen*

Variabeln $a_{11}, \ldots, a_{1\mu}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu}$ und den μ unabhängigen Variabeln $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ in der allgemeinsten Weise befriedigt werden.

Da die $m\mu$ Grössen $a_{\varrho\sigma}$ Functionen der μ unabhängigen Variabeln $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ sein sollen, so werden sie sämmtlich als von μ ihrer Grössen abhängig betrachtet werden können, und wählen wir für diese die μ Parameter

$$a_{11}, \quad a_{12}, \quad \ldots, \quad a_{1\mu},$$

so geht das System der Differentialgleichungen (47.) in das folgende über:

$$(48.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{21}}\frac{\partial a_{21}}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{22}}\frac{\partial a_{22}}{\partial a_{11}} + \cdots + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{2\mu}}\frac{\partial a_{2\mu}}{\partial a_{11}} + \cdots \right. \\ \qquad \left. \cdots + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial a_{11}} + \cdots + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{m\mu}}\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{11}}\right)\frac{\partial a_{11}}{\partial z_\alpha} \\ + \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ + \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{1\mu}} + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{21}}\frac{\partial a_{21}}{\partial a_{1\mu}} + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{22}}\frac{\partial a_{22}}{\partial a_{1\mu}} + \cdots + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{2\mu}}\frac{\partial a_{2\mu}}{\partial a_{1\mu}} + \cdots \right. \\ \qquad \left. \cdots + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial a_{1\mu}} + \cdots + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{m\mu}}\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{1\mu}}\right)\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_\alpha} = 0, \end{cases}$$

worin λ die Werthe $1, 2, \ldots, m$ und α die Werthe $1, 2, \ldots, \mu$ annimmt.

Schreiben wir die einem bestimmten λ, aber den μ Werthen des α entsprechenden Gleichungen (48.) kürzer in der folgenden Form

$$(49.)\quad \begin{cases} P_{\lambda 1}\frac{\partial a_{11}}{\partial z_1} + P_{\lambda 2}\frac{\partial a_{12}}{\partial z_1} + \cdots + P_{\lambda\mu}\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_1} = 0, \\ P_{\lambda 1}\frac{\partial a_{11}}{\partial z_2} + P_{\lambda 2}\frac{\partial a_{12}}{\partial z_2} + \cdots + P_{\lambda\mu}\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_2} = 0, \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ P_{\lambda 1}\frac{\partial a_{11}}{\partial z_\mu} + P_{\lambda 2}\frac{\partial a_{12}}{\partial z_\mu} + \cdots + P_{\lambda\mu}\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_\mu} = 0, \end{cases}$$

so folgt entweder

$$(50.)\qquad P_{\lambda 1} = 0, \quad P_{\lambda 2} = 0, \quad \ldots, \quad P_{\lambda\mu} = 0 \quad (\text{für } \lambda = 1, 2, \ldots, m),$$

oder es ist die Functionaldeterminante

$$(51.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial z_1} & \frac{\partial a_{12}}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_1} \\ \frac{\partial a_{11}}{\partial z_2} & \frac{\partial a_{12}}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial a_{11}}{\partial z_\mu} & \frac{\partial a_{12}}{\partial z_\mu} & \cdots & \frac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_\mu} \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. es ist

$$\varphi_0(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\mu}) = 0, \tag{52.}$$

worin φ_0 eine willkürliche Function bedeutet.

Schreiben wir jedoch die einem bestimmten Werthe des α, aber den m Werthen des λ entsprechenden Gleichungen (48.) in der Form

$$\left\{\begin{array}{l} P_{11}\dfrac{\partial a_{11}}{\partial z_\alpha} + P_{12}\dfrac{\partial a_{12}}{\partial z_\alpha} + \cdots + P_{1\mu}\dfrac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_\alpha} = 0, \\ P_{21}\dfrac{\partial a_{11}}{\partial z_\alpha} + P_{22}\dfrac{\partial a_{12}}{\partial z_\alpha} + \cdots + P_{2\mu}\dfrac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_\alpha} = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ P_{m1}\dfrac{\partial a_{11}}{\partial z_\alpha} + P_{m2}\dfrac{\partial a_{12}}{\partial z_\alpha} + \cdots + P_{m\mu}\dfrac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_\alpha} = 0, \end{array}\right. \tag{53.}$$

so sehen wir, dass die Gleichungen (50.) auch das System (53.) erfüllen, während die Annahme (51.) oder (52.) eine neue Umgestaltung der Gleichungen (47.) erfordert.

Setzen wir nun die Gleichungen (50.) ihrer Bedeutung in (48.) gemäss in die Form

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial a_{11}} + \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial a_{21}}\dfrac{\partial a_{21}}{\partial a_{11}} + \cdots + \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial a_{2\mu}}\dfrac{\partial a_{2\mu}}{\partial a_{11}} + \cdots \\ \qquad \cdots + \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial a_{m1}}\dfrac{\partial a_{m1}}{\partial a_{11}} + \cdots + \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial a_{m\mu}}\dfrac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{11}} = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial a_{1\mu}} + \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial a_{21}}\dfrac{\partial a_{21}}{\partial a_{1\mu}} + \cdots + \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial a_{2\mu}}\dfrac{\partial a_{2\mu}}{\partial a_{1\mu}} + \cdots \\ \qquad \cdots + \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial a_{m1}}\dfrac{\partial a_{m1}}{\partial a_{1\mu}} + \cdots + \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial a_{m\mu}}\dfrac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{1\mu}} = 0, \end{array}\right. \tag{54.}$$

worin $\lambda = 1, 2, \ldots, m$ zu setzen ist, so erhalten wir $m\mu$ Gleichungen, welche ausser den a-Grössen noch $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ enthalten; eliminiren wir nun noch zwischen den $m\mu$ Gleichungen die μ Grössen $z_1, \ldots, z_\mu$, so ergiebt sich ein partielles Differentialgleichungsystem $\mu(m-1)$ter Klasse mit den μ unabhängigen Variabeln $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\mu}$ und den $\mu(m-1)$ abhängigen Variabeln

$$a_{21}, \;\ldots,\; a_{2\mu}, \;\ldots,\; a_{m1}, \;\ldots,\; a_{m\mu}$$

von der Form

$$(55.)\begin{cases}\psi_1\Big(a_{11},\ \dots,\ a_{1\mu},\ a_{21},\ \dots,\ a_{2\mu},\ \dots,\ a_{m1},\ \dots,\ a_{m\mu}, \\ \qquad \dfrac{\partial a_{21}}{\partial a_{11}},\ \dots,\ \dfrac{\partial a_{21}}{\partial a_{1\mu}},\ \dots,\ \dfrac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{11}},\ \dots,\ \dfrac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{1\mu}}\Big) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \psi_{\mu(m-1)}\Big(a_{11},\ \dots,\ a_{1\mu},\ a_{21},\ \dots,\ a_{2\mu},\ \dots,\ a_{m1},\ \dots,\ a_{m\mu}, \\ \qquad \dfrac{\partial a_{21}}{\partial a_{11}},\ \dots,\ \dfrac{\partial a_{21}}{\partial a_{1\mu}},\ \dots,\ \dfrac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{11}},\ \dots,\ \dfrac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{1\mu}}\Big) = 0;\end{cases}$$

jedes Integralsystem dieser Gleichungen, in μ beliebige der Gleichungen (54.) eingesetzt, liefert $a_{11}, \dots, a_{1\mu}$ ohne Integration durch $z_1, z_2, \dots, z_\mu$ ausgedrückt, und es sind dann somit die $m\mu$ Parameter so als Functionen von z bestimmt, dass durch diese Variation der Constanten die Gleichungen (37.) wieder Integralgleichungen werden.

Hier tritt aber ein wesentlicher Unterschied gegenüber den totalen Differentialgleichungsystemen beliebiger Klasse und den partiellen Differentialgleichungsystemen erster Klasse ein, indem in diesen beiden Fällen die Bestimmung der Parameter jedenfalls auf die Integration von Differentialgleichungsystemen niederer Klasse, als die des vorgelegten war, führt, und somit die wirkliche Herleitung aller anderen Integrale aus dem Systeme vollständiger Integrale als möglich zu betrachten ist*), während wir in dem

---

*) und zwar war für partielle Differentialgleichungsysteme erster Klasse, d. h. also für *eine* partielle Differentialgleichung erster Ordnung, wie wir vorher sahen, gar keine Integration weiter auszuführen, während die Bestimmung der singulären Integrale totaler Differentialgleichungsysteme, wie wir im Folgenden kurz begründen wollen, auf die Integration totaler Differentialgleichungsysteme niederer Klasse führt.

Sei nämlich für ein System totaler algebraisch von einander unabhängiger Differentialgleichungen

$$(1.)\quad\begin{cases}f_1\Big(z,\ u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_m,\ \dfrac{du_1}{dz},\ \dots,\ \dfrac{du_m}{dz}\Big) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_m\Big(z,\ u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_m,\ \dfrac{du_1}{dz},\ \dots,\ \dfrac{du_m}{dz}\Big) = 0\end{cases}$$

das allgemeine Integralsystem in der Form gegeben

$$(2.)\quad u_1 = F_1(z,\ c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_m),\quad \dots,\quad u_m = F_m(z,\ c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_m),$$

worin $c_1, c_2, \dots, c_m$ willkürliche Constanten bedeuten, so dass die Elimination dieser Grössen aus (2.) und den durch Differentiation aus diesen hergeleiteten

$$(3.)\quad \frac{du_1}{dz} = \frac{dF_1}{dz},\quad \dots,\quad \frac{du_m}{dz} = \frac{dF_m}{dz}$$

allgemeinen Falle der partiellen Differentialgleichungsysteme $m$ter Klasse, wie wir eben sahen, nothwendig auf ein partielles Differentialgleichungsystem $\mu(m-1)$ter Klasse geführt werden, und $\mu(m-1)$ nur kleiner als m ist, wenn für beliebige μ $m=1$, oder wenn für beliebige m $\mu=1$ ist. *In dem angegebenen Sinne darf man also nicht sagen, dass diese Methode der Variation der Constanten die Herleitung anderer Integralsysteme aus dem vollständigen Integralsystem ermöglicht.*

---

das Gleichungsystem (1.) oder ein algebraisch aequivalentes liefert, so giebt es noch andere Complexe von Integralsystemen, welche den Gleichungen (1.) genügen, und die man mit Beibehaltung der Functionalformen (2.) dadurch erhält, dass man $c_1, c_2, \ldots, c_m$ passend als Functionen von z wählt.

Bestimmt man nämlich $c_1, c_2, \ldots, c_m$ so als Functionen von z, dass die durch Differentiation nach z aus (2.) hergeleiteten Gleichungen

$$(4.)\quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dz} = \dfrac{\partial F_1}{\partial z} + \dfrac{\partial F_1}{\partial c_1}\dfrac{dc_1}{dz} + \cdots + \dfrac{\partial F_1}{\partial c_m}\dfrac{dc_m}{dz}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{du_m}{dz} = \dfrac{\partial F_m}{\partial z} + \dfrac{\partial F_m}{\partial c_1}\dfrac{dc_1}{dz} + \cdots + \dfrac{\partial F_m}{\partial c_m}\dfrac{dc_m}{dz} \end{cases}$$

formal in das Gleichungsystem (3.) übergehen, dass also die Gleichungen erfüllt werden

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial c_1}\dfrac{dc_1}{dz} + \dfrac{\partial F_1}{\partial c_2}\dfrac{dc_2}{dz} + \cdots + \dfrac{\partial F_1}{\partial c_m}\dfrac{dc_m}{dz} = 0, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial c_1}\dfrac{dc_1}{dz} + \dfrac{\partial F_2}{\partial c_2}\dfrac{dc_2}{dz} + \cdots + \dfrac{\partial F_2}{\partial c_m}\dfrac{dc_m}{dz} = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial c_1}\dfrac{dc_1}{dz} + \dfrac{\partial F_m}{\partial c_2}\dfrac{dc_2}{dz} + \cdots + \dfrac{\partial F_m}{\partial c_m}\dfrac{dc_m}{dz} = 0, \end{cases}$$

so wird offenbar die Elimination der m nunmehr variabeln Grössen $c_1, c_2, \ldots, c_m$ zwischen den Gleichungen (4.) und (2.) wiederum das Differentialgleichungsystem (1.) liefern, die neuen Gleichungen (2.) daher auch ein Integralsystem bilden.

Um allgemein die Bestimmungsgleichungen (5.) zu behandeln, bemerke man, dass, weil $c_1, c_2, \ldots, c_m$ Functionen der unabhängigen Variabeln z sind, auch $c_2, \ldots, c_m$ sich als Functionen von c_1 darstellen lassen werden, und man somit das Differentialgleichungsystem (5.) mit Weglassung des allen Gleichungen gemeinsamen Factors $\dfrac{dc_1}{dz}$ in die Form setzen kann

$$(6.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial c_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial c_2}\dfrac{dc_2}{dc_1} + \cdots + \dfrac{\partial F_1}{\partial c_m}\dfrac{dc_m}{dc_1} = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial c_1} + \dfrac{\partial F_m}{\partial c_2}\dfrac{dc_2}{dc_1} + \cdots + \dfrac{\partial F_m}{\partial c_m}\dfrac{dc_m}{dc_1} = 0; \end{cases}$$

Es bliebe noch der durch die Gleichung (52.) oder durch eine Beziehung von der Form

$$(56.)\qquad a_{1\mu} = \varphi(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\mu-1})$$

definirte Fall zu betrachten, in welchem φ eine willkürliche Function bedeutet; in diesem Falle könnte man sämmtliche a-Grössen als Functionen der Parameter

$$a_{21}, \quad a_{22}, \quad \ldots, \quad a_{2\mu}$$

betrachten und würde statt der Gleichungen (54.) mit Berücksichtigung von

---

da zunächst aus (5.)

$$(7.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial c_1} & \frac{\partial F_1}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial c_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial c_1} & \frac{\partial F_m}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial c_m} \end{vmatrix} = 0$$

folgt, so kann man aus der Gleichung (7.) die Grösse z durch $c_1, c_2, \ldots, c_m$ ausdrücken und in (6.) einsetzen, so dass man zur Bestimmung von $c_2, c_3, \ldots, c_m$ als Functionen von c_1 das nachfolgende nur $m-1$ totale Differentialgleichungen enthaltende System erhält:

$$(8.)\qquad \begin{cases} \omega_{11}(c_1, c_2, \ldots, c_m) + \omega_{12}(c_1, c_2, \ldots, c_m)\frac{dc_2}{dc_1} + \cdots \\ \qquad \cdots + \omega_{1m}(c_1, c_2, \ldots, c_m)\frac{dc_m}{dc_1} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \omega_{m-1,1}(c_1, c_2, \ldots, c_m) + \omega_{m-1,2}(c_1, c_2, \ldots, c_m)\frac{dc_2}{dc_1} + \cdots \\ \qquad \cdots + \omega_{m-1,m}(c_1, c_2, \ldots, c_m)\frac{dc_m}{dc_1} = 0, \end{cases}$$

dessen allgemeine Integration die Beziehungen

$$(9.)\qquad \begin{cases} \Omega_1(c_1, c_2, \ldots, c_m, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Omega_{m-1}(c_1, c_2, \ldots, c_m, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}) = 0 \end{cases}$$

liefert, worin $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ willkürliche Constanten bedeuten. Stellt man diese $m-1$ Gleichungen mit (7.) zusammen, so erhält man $c_1, c_2, \ldots, c_m$ als Functionen von z und den $m-1$ Constanten $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ von der Art, dass diese Werthe in (2.) eingesetzt ein neues, im Allgemeinen in dem früheren nicht enthaltenes Integralsystem mit $m-1$ willkürlichen Constanten liefern. Es ist aber klar, dass man in den Integralen (9.) des Differentialgleichungssystems (8.) wiederum $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ so als Functionen von $c_1, c_2, \ldots, c_m$ mit $m-2$ willkürlichen Constanten $b_1, b_2, \ldots, b_{m-2}$ bestimmen kann, dass dieselben Formen (9.) ein Integralsystem von (8.) bilden, also die neuen Werthe der $c_1, c_2, \ldots, c_m$, mit $m-2$ willkürlichen Constanten versehen, in (2.) eingesetzt wiederum ein neues Integralsystem der Differentialgleichungen (1.) liefern. Schliessen wir so weiter, so ergiebt sich der folgende Satz:

(56.) das folgende Differentialgleichungsystem zu befriedigen haben:

$$(57.)\quad \begin{cases} \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{21}} + \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{1\mu}}\frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}}\right)\frac{\partial a_{11}}{\partial a_{21}} + \cdots + \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{1\mu-1}} + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{1\mu}}\frac{\partial \varphi}{\partial a_{1\mu-1}}\right)\frac{\partial a_{1\mu-1}}{\partial a_{21}} + \cdots \\ \qquad \cdots + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial a_{21}} + \cdots + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{m\mu}}\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{21}} = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{2\mu}} + \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{1\mu}}\frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}}\right)\frac{\partial a_{11}}{\partial a_{2\mu}} + \cdots + \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{1\mu-1}} + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{1\mu}}\frac{\partial \varphi}{\partial a_{1\mu-1}}\right)\frac{\partial a_{1\mu-1}}{\partial a_{2\mu}} + \cdots \\ \qquad \cdots + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial a_{2\mu}} + \cdots + \frac{\partial F_\lambda}{\partial a_{m\mu}}\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{2\mu}} = 0, \end{cases}$$

Ist das allgemeine Integralsystem (2.) eines Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen $m$ter Klasse (1.) bekannt, so kann man aus demselben mit Hülfe der allgemeinen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungsysteme $(m-1)$ter, $(m-2)$ter, ..., 1ter Klasse eine Reihe anderer, in den gegebenen Integralen im Allgemeinen nicht enthaltener, mit $m-1$, $m-2$, ..., 1 willkürlichen Constanten versehener Integralsysteme der Differentialgleichungen (1.) herleiten, welche sämmtlich in der Form der Gleichungen (2.) enthalten sind und durch Variation der in denselben enthaltenen Constanten abgeleitet werden, — und andere Integralsysteme als diese giebt es nicht.

Sei z. B. das gewöhnliche Differentialgleichungsystem zweiter Klasse gegeben

$$u_1 = z\left(\frac{1}{z}\frac{du_2}{dz} - \frac{u_2}{z^2}\right)^2 + z^2\left(\frac{2u_2}{z} - \frac{du_2}{dz}\right),$$

$$\frac{du_1}{dz} = \left(\frac{1}{z}\frac{du_2}{dz} - \frac{u_2}{z^2}\right)^2 + 2z\left(\frac{2u_2}{z} - \frac{du_2}{dz}\right),$$

dessen allgemeines Integralsystem die Form hat

$$u_1 = c_1^2 z + c_2 z^2,$$
$$u_2 = c_1 z^2 + c_2 z,$$

so ist nach den Gleichungen (7.)

$$2c_1 + z\frac{dc_2}{dc_1} = 0, \quad z + \frac{dc_2}{dc_1} = 0;$$

da die Determinante (8.)

$$2c_1 - z^2 = 0 \quad \text{oder} \quad z = \sqrt{2c_1}$$

liefert, so lautet die Differentialgleichung in c_1 und c_2

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\sqrt{2c_1} \quad \text{oder} \quad c_2 = -\tfrac{1}{3}(2c_1)^{\frac{3}{2}} + a_1,$$

woraus

$$c_1 = \frac{z^2}{2}, \quad c_2 = -\tfrac{1}{3}z^3 + a_1$$

folgt, und es lauten somit die durch Variation der Constanten hergeleiteten Integrale

$$u_1 = -\tfrac{1}{12}z^5 + a_1 z^2,$$
$$u_2 = \tfrac{1}{6}z^4 + a_1 z,$$

worin a_1 eine willkürliche Constante bedeutet.

worin $\lambda = 1, 2, \ldots, m$ zu setzen ist; eliminiren wir wieder aus μ dieser Gleichungen die Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$, so bleiben $\mu(m-1)$ Differentialgleichungen in den μ unabhängigen Variabeln $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2\mu}$ und den $\mu(m-1)-1$ abhängigen Variabeln

$$a_{11}, \quad a_{12}, \quad \ldots, \quad a_{1\mu-1}, \quad a_{31}, \quad \ldots, \quad a_{3\mu}, \quad \ldots, \quad a_{m1}, \quad \ldots, \quad a_{m\mu},$$

also ein überbestimmtes Differentialgleichungsystem, das nur unter bestimmten Bedingungen gemeinsame Integrale besitzt — wenn nicht wieder

$$(58.) \qquad a_{2\mu} = \psi(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2\mu-1})$$

ist, worin ψ eine willkürliche Function bedeutet. Jedenfalls würden wir stets auf Differentialgleichungsysteme höherer Klasse als die des vorgelegten Differentialgleichungsystems es ist, deren vollständige Integralsysteme wir kennen, geführt werden, und man sieht somit, dass der für gewöhnliche Differentialgleichungsysteme beliebiger Klasse und partielle Differentialgleichungsysteme erster Klasse vorgezeichnete Weg zur Herleitung aller Integralsysteme eines partiellen Differentialgleichungsystems beliebiger Klasse aus dem vollständigen Integralsysteme nicht zum Ziele führt, und daher andere Methoden erforderlich sind.

Betrachten wir zunächst ein partielles Differentialgleichungsystem $m$ter Klasse mit zwei unabhängigen Variabeln:

$$(59.) \quad \begin{cases} f_1\left(z_1, z_2, u_1, u_2, \ldots, u_m, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_1}, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_2}\right) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m\left(z_1, z_2, u_1, u_2, \ldots, u_m, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_1}, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_2}\right) = 0, \end{cases}$$

dessen vollständiges Integralsystem durch

$$(60.) \quad \begin{cases} u_1 = F_1(z_1, z_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m = F_m(z_1, z_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}) = 0 \end{cases}$$

dargestellt sein mag, so ist oben gezeigt worden, dass die ***allgemeinen*** Integralsysteme von (59.) die Form haben

$$(61.) \quad \begin{cases} u_1 = \omega_1(z_1, z_2, \varphi_1[\psi_1(z_1, z_2)], \varphi_2[\psi_2(z_1, z_2)], \ldots, \varphi_m[\psi_m(z_1, z_2)]), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m = \omega_m(z_1, z_2, \varphi_1[\psi_1(z_1, z_2)], \varphi_2[\psi_2(z_1, z_2)], \ldots, \varphi_m[\psi_m(z_1, z_2)]), \end{cases}$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ willkürliche Functionen, $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ bestimmte Variabelnverbindungen von z_1 und z_2 bedeuten. *Nachdem oben nachgewiesen*

worden, dass alle Integralsysteme von (59.) *durch solche Variation der Constanten, welche die Differentialgleichungen*

$$(62.)\quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial z_\alpha}+\frac{\partial F_1}{\partial a_{12}}\frac{\partial a_{12}}{\partial z_\alpha}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial z_\alpha}+\frac{\partial F_1}{\partial a_{m2}}\frac{\partial a_{m2}}{\partial z_\alpha} = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial z_\alpha}+\frac{\partial F_2}{\partial a_{12}}\frac{\partial a_{12}}{\partial z_\alpha}+\cdots+\frac{\partial F_2}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial z_\alpha}+\frac{\partial F_2}{\partial a_{m2}}\frac{\partial a_{m2}}{\partial z_\alpha} = 0, \quad (\text{für } \alpha=1,2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial z_\alpha}+\frac{\partial F_m}{\partial a_{12}}\frac{\partial a_{12}}{\partial z_\alpha}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial z_\alpha}+\frac{\partial F_m}{\partial a_{m2}}\frac{\partial a_{m2}}{\partial z_\alpha} = 0 \end{cases}$$

befriedigen, erhalten werden können, suchen wir zunächst aus den vollständigen Integralen (60.) alle diejenigen Integralsysteme herzustellen, welche nur *eine* willkürliche Function *einer* Variabelnverbindung von z_1 und z_2 enthalten und also in der Form dargestellt sein sollen

$$(63.)\quad \begin{cases} u_1 = \Omega_1(z_1,\ z_2,\ \varphi_1[\psi_1(z_1,\ z_2)]), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m = \Omega_m(z_1,\ z_2,\ \varphi_m[\psi_m(z_1,\ z_2)]); \end{cases}$$

es wird dann das partielle Differentialgleichungsystem $2m$ter Klasse (62.) so zu integriren sein, dass die Gleichungen

$$(64.)\quad \begin{cases} F_1(z_1,\ z_2,\ a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{m1},\ a_{m2}) = \Omega_1(z_1,\ z_2,\ \varphi_1[\psi_1(z_1,\ z_2)]), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(z_1,\ z_2,\ a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{m1},\ a_{m2}) = \Omega_m(z_1,\ z_2,\ \varphi_1[\psi_1(z_1,\ z_2)]) \end{cases}$$

identisch befriedigt werden.

Da sich die $a_{\alpha\beta}$ als Functionen von z_1 und z_2 ergeben, so kann man sich $z_1,\ z_2,\ a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{m1},\ a_{m2}$ als Functionen von a_{11} und a_{12} dargestellt denken, und wenn diese Werthe in die Gleichungen (64.) eingesetzt würden, müssten diese identisch erfüllt werden; greift man aber zwei beliebige dieser Gleichungen heraus und setzt die Functionalwerthe der eben bezeichneten Grössen in a_{11}, a_{12} ausgedrückt überall ausser in $\psi_1(z_1,\ z_2)$ ein, so kann man a_{11} und a_{12} als Functionen der einen Variabelnverbindung $\psi_1(z_1,\ z_2)$ ausdrücken und darf also annehmen, dass sich sämmtliche Grössen a_{11}, $a_{12},\ \ldots,\ a_{m1},\ a_{m2}$ als Functionen *einer* Grösse

$$(65.)\quad \psi_1(z_1,\ z_2) = x$$

ausdrücken lassen. Da in Folge dessen

$$(66.)\quad \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial z_\alpha} = \frac{da_{\lambda\mu}}{dx}\frac{\partial x}{\partial z_\alpha}$$

ist, so gehen die Gleichungen (62.) über in

$$(67.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial a_{11}}\dfrac{da_{11}}{dx}+\dfrac{\partial F_1}{\partial a_{12}}\dfrac{da_{12}}{dx}+\cdots+\dfrac{\partial F_1}{\partial a_{m1}}\dfrac{da_{m1}}{dx}+\dfrac{\partial F_1}{\partial a_{m2}}\dfrac{da_{m2}}{dx} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial a_{11}}\dfrac{da_{11}}{dx}+\dfrac{\partial F_m}{\partial a_{12}}\dfrac{da_{12}}{dx}+\cdots+\dfrac{\partial F_m}{\partial a_{m1}}\dfrac{da_{m1}}{dx}+\dfrac{\partial F_m}{\partial a_{m2}}\dfrac{da_{m2}}{dx} = 0, \end{cases}$$

und wir wissen, dass sich $a_{11}, \ldots, a_{m2}$ so als Functionen von x bestimmen lassen, dass den Gleichungen (67.) genügt wird; wenn sich aber alle Grössen a durch x, also auch sämmtlich durch eine der Grössen selbst, z. B. durch a_{11}, ausdrücken lassen, so können wir die Gleichungen (67.) ersetzen durch

$$(68.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial a_{11}}+\dfrac{\partial F_1}{\partial a_{12}}\dfrac{da_{12}}{da_{11}}+\cdots+\dfrac{\partial F_1}{\partial a_{m1}}\dfrac{da_{m1}}{da_{11}}+\dfrac{\partial F_1}{\partial a_{m2}}\dfrac{da_{m2}}{da_{11}} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial a_{11}}+\dfrac{\partial F_m}{\partial a_{12}}\dfrac{da_{12}}{da_{11}}+\cdots+\dfrac{\partial F_m}{\partial a_{m1}}\dfrac{da_{m1}}{da_{11}}+\dfrac{\partial F_m}{\partial a_{m2}}\dfrac{da_{m2}}{da_{11}} = 0, \end{cases}$$

worin die gegebenen Functionen $F_1, F_2, \ldots, F_m$ noch die Variabeln z_1 und z_2 enthalten. Denkt man sich nun aus einer der Gleichungen (68.) die Variable z_2 durch die anderen in derselben vorkommenden Grössen in der Form

$$(69.)\quad z_2 = h\left(z_1, a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \frac{da_{12}}{da_{11}}, \ldots, \frac{da_{m1}}{da_{11}}, \frac{da_{m2}}{da_{11}}\right)$$

ausgedrückt, so ergeben sich, wenn dieser Werth für z_2 in die übrigen $m-1$ Gleichungen (68.) eingesetzt wird, Beziehungsgleichungen, welche die Grössen

$$a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{m1},\ a_{m2},\ \frac{da_{12}}{da_{11}},\ \ldots\ \frac{da_{m1}}{da_{11}},\ \frac{da_{m2}}{da_{11}}\ \text{ und }\ z_1$$

enthalten, und da sämmtliche a-Grössen reine Functionen von a_{11} sind, und diese im Allgemeinen eine Function einer bestimmten Variabelnverbindung (65.) von z_1 und z_2 ist, so werden die so erhaltenen Gleichungen

$$(70.)\quad \begin{cases} h_1\left(z_1, a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \dfrac{da_{12}}{da_{11}}, \ldots, \dfrac{da_{m1}}{da_{11}}, \dfrac{da_{m2}}{da_{11}}\right) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_{m-1}\left(z_1, a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \dfrac{da_{12}}{da_{11}}, \ldots, \dfrac{da_{m1}}{da_{11}}, \dfrac{da_{m2}}{da_{11}}\right) = 0 \end{cases}$$

für jeden Werth von z_1 bestehen und somit beliebig oft nach z_1 differentiirt werden dürfen, wenigstens so lange, als nicht z_1 aus den analytisch ge-

gebenen Ausdrücken $h_1, \ldots, h_{m-1}$ verschwindet. Differentiirt man nun jede der Gleichungen (70.) nach z_1 und eliminirt zwischen dieser und dem partiell nach z_1 genommenen Differentialquotienten die Grösse z_1, so erhält man zwischen den a-Grössen und deren nach a_{11} genommenen ersten Differentialquotienten eine nothwendig zu erfüllende Beziehung; differentiirt man den nach z_1 genommenen partiellen Differentialquotienten nochmals partiell nach z_1 und eliminirt zwischen den beiden durch Differentiation entstandenen Gleichungen wiederum z_1, so erhält man eine zweite nothwendig zu erfüllende Bedingungsgleichung, und dies setze man so lange fort, als die sich so ergebenden Bedingungsgleichungen zwischen den a-Grössen und deren ersten nach a_{11} genommenen Differentialquotienten von einander unabhängig sind; führt man dies für jede der Gleichungen (70.) aus, so ergiebt sich eine Reihe nothwendig zu erfüllender Differentialgleichungen von der Form

$$(71.)\quad \begin{cases} k_1\left(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \dfrac{da_{12}}{da_{11}}, \ldots, \dfrac{da_{m1}}{da_{11}}, \dfrac{da_{m2}}{da_{11}}\right) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_\nu\left(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \dfrac{da_{12}}{da_{11}}, \ldots, \dfrac{da_{m1}}{da_{11}}, \dfrac{da_{m2}}{da_{11}}\right) = 0. \end{cases}$$

Nun wissen wir aber einerseits, dass die Zahl der von einander unabhängigen Differentialgleichungen für die a-Grössen als Functionen von a_{11} nicht grösser sein darf als die Anzahl $2m-1$ der a-Grössen

$$(\alpha.)\qquad a_{12}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{m1}, a_{m2},$$

da die letzteren den obigen Auseinandersetzungen zufolge als reine Functionen der variablen Grösse a_{11} darstellbar sind, andererseits darf aber auch die Anzahl der von einander unabhängigen Gleichungen die Zahl $2m-1$ nicht erreichen, da, wenn dies der Fall wäre, sich von den Integrationsconstanten abgesehen die Grössen $(\alpha.)$ als bestimmte Functionen von a_{11} ergeben würden, die in (68.) eingesetzt für a_{11}, also auch für all' die andern a-Grössen bestimmte Functionen von z_1 und z_2 liefern würden, während vermöge (64.) die Functionalausdrücke der a eine willkürliche Function von $\psi_1(z_1, z_2)$ enthalten sollen — es wird somit im Allgemeinen $\nu = 2m-2$ sein, so dass man eine der a-Grössen einer willkürlichen Function von a_{11} gleichsetzen darf und (71.) sodann ein gewöhnliches Differentialgleichungsystem $(2m-2)$ter Klasse in den $2m-2$ übrigen abhängigen a-Grössen und der unabhängigen Variabeln a_{11} liefert, welche aus (69.) mit Hülfe der eben gefundenen Werthe sich als Function von z_1 und z_2 ergiebt.

so stelle man das System gewöhnlicher Differentialgleichungen auf:

$$(74.)\quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{12}}\frac{da_{12}}{da_{11}} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial a_{m1}}\frac{da_{m1}}{da_{11}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{m2}}\frac{da_{m2}}{da_{11}} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_m}{\partial a_{12}}\frac{da_{12}}{da_{11}} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial a_{m1}}\frac{da_{m1}}{da_{11}} + \frac{\partial F_m}{\partial a_{m2}}\frac{da_{m2}}{da_{11}} = 0, \end{cases}$$

drücke aus einer dieser Gleichungen z_2 *in der Form*

$$(75.)\quad z_2 = h\left(z_1,\ a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{m1},\ a_{m2},\ \frac{da_{12}}{da_{11}},\ \ldots,\ \frac{da_{m1}}{da_{11}},\ \frac{da_{m2}}{da_{11}}\right)$$

aus und setze diesen Werth in die übrigen $m-1$ *Gleichungen von* (74.) *ein, so dass sich die Differentialgleichungen ergeben*

$$(76.)\quad \begin{cases} h_1\left(z_1,\ a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{m1},\ a_{m2},\ \frac{da_{12}}{da_{11}},\ \ldots,\ \frac{da_{m1}}{da_{11}},\ \frac{da_{m2}}{da_{11}}\right) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ h_{m-1}\left(z_1,\ a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{m1},\ a_{m2},\ \frac{da_{12}}{da_{11}},\ \ldots,\ \frac{da_{m1}}{da_{11}},\ \frac{da_{m2}}{da_{11}}\right) = 0. \end{cases}$$

Differentiirt man nunmehr jede dieser Gleichungen partiell nach z_1 *und eliminirt* z_1 *zwischen dieser und der eben bezeichneten Ableitung, und setzt diese Differentiation und Elimination so lange fort, als die sich so ergebenden Bedingungsgleichungen zwischen den a-Grössen und den ersten nach* a_{11} *genommenen Differentialquotienten von einander unabhängig sind, so erhält man im Allgemeinen ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem* $(2m-2)$*ter Klasse*

$$(77.)\quad \begin{cases} k_1\left(a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{m1},\ a_{m2},\ \frac{da_{12}}{da_{11}},\ \ldots,\ \frac{da_{m1}}{da_{11}},\ \frac{da_{m2}}{da_{11}}\right) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ k_{2m-2}\left(a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{m1},\ a_{m2},\ \frac{da_{12}}{da_{11}},\ \ldots,\ \frac{da_{m1}}{da_{11}},\ \frac{da_{m2}}{da_{11}}\right) = 0, \end{cases}$$

woraus sich durch Integration, indem

$$(78.)\quad a_{12} = \varphi(a_{11})$$

gesetzt wird, worin φ *eine willkürliche Function bedeutet,*

$$(79.)\quad \begin{cases} a_{21} = \omega_{21}(a_{11},\ \varphi(a_{11}),\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{2m-2}), \\ a_{22} = \omega_{22}(a_{11},\ \varphi(a_{11}),\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{2m-2}), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} = \omega_{m1}(a_{11},\ \varphi(a_{11}),\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{2m-2}), \\ a_{m2} = \omega_{m2}(a_{11},\ \varphi(a_{11}),\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{2m-2}) \end{cases}$$

ergeben, wenn $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{2m-2}$ *beliebige Integrationsconstanten bedeuten; setzt man diese Werthe in* (75.) *ein, so ergiebt sich* a_{11} *als Function von* z_1 *und* z_2, *und es sind somit* $a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{m1},\ a_{m2}$ *als Functionen von* z_1 *und* z_2 *er-*

mittelt, welche eine willkürliche Function einer Variabelnverbindung von z_1 und z_2 sowie $2m-2$ willkürliche Constanten enthalten. Setzt man diese Werthe der a-Grössen in die Integralformen (73.) ein, so bilden diese Ausdrücke ein Integralsystem der Differentialgleichungen (72.), und man kann auf demselben Wege $c_1, c_2, \dots, c_{2m-2}$ durch Variation dieser Constanten so als Functionen von z_1, z_2, einer zweiten willkürlichen Function einer Variabelnverbindung von z_1 und z_2, sowie von $2m-4$ willkürlichen Constanten bestimmen, dass dieselben Formen Integralsysteme des ursprünglichen Differentialgleichungssystems bleiben; fährt man so fort, so ergiebt sich aus dem ursprünglichen Integralsystem (73.) durch wiederholte Variation der Constanten und Integration gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme das allgemeine Integralsystem der partiellen Differentialgleichungen (72.) mit m willkürlichen Functionen von je einer Variabelnverbindung von z_1 und z_2).*

Es mag als Beispiel für die Durchführung des eben ausgesprochenen Verfahrens das partielle Differentialgleichungssystem zweiter Klasse mit zwei unabhängigen Variabeln

$$(80.)\quad \begin{cases} z_2\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}-z_1\dfrac{\partial u_2}{\partial z_2} = 0, \\ z_1\dfrac{\partial u_1}{\partial z_2}-z_2\dfrac{\partial u_2}{\partial z_1} = 0 \end{cases}$$

gewählt werden, dessen vollständiges Integralsystem durch die Gleichungen

$$(81.)\quad \begin{cases} u_1 = a+(b+c)z_1^2+(c-b)z_2^2+e(z_1^4+2z_1^2z_2^2+z_2^4), \\ u_2 = -a+(c-b)z_1^2+(c+b)z_2^2+e(z_1^4+2z_1^2z_2^2+z_2^4) \end{cases}$$

gegeben ist, in welchen a, b, c, e willkürliche Constanten bedeuten. Die den Gleichungen (74.) entsprechenden Beziehungen lauten

$$(82.)\quad \begin{cases} 1+(z_1^2-z_2^2)\dfrac{db}{da}+(z_1^2+z_2^2)\dfrac{dc}{da}+(z_1^2+z_2^2)^2\dfrac{de}{da} = 0, \\ -1-(z_1^2-z_2^2)\dfrac{db}{da}+(z_1^2+z_2^2)\dfrac{dc}{da}+(z_1^2+z_2^2)^2\dfrac{de}{da} = 0 \end{cases}$$

oder

$$(83.)\quad \begin{cases} 1+(z_1^2-z_2^2)\dfrac{db}{da} = 0, \\ \dfrac{dc}{da}+(z_1^2+z_2^2)\dfrac{de}{da} = 0; \end{cases}$$

---

*) In welchem Zusammenhange dieses Verfahren mit der Frage steht, für welche linearen partiellen Differentialgleichungssysteme sich die Integration auf die von totalen Differentialgleichungssystemen zurückführen lässt, soll bei einer anderen Gelegenheit erörtert werden.

da aus der ersten dieser beiden Gleichungen

$$(84.)\qquad z_2^2 = \frac{1+z_1^2\frac{db}{da}}{\frac{db}{da}}$$

folgt, so ist das System (82.) durch die eine gewöhnliche Differentialgleichung zu ersetzen

$$\frac{dc}{da}+\frac{1+2z_1^2\frac{db}{da}}{\frac{db}{da}}\cdot\frac{de}{da} = 0,$$

und man erhält somit durch partielle Differentiation nach z_1

$$(85.)\qquad \frac{de}{da} = 0,\quad \frac{dc}{da} = 0$$

also

$$(86.)\qquad e = c_1,\quad c = c_2,$$

worin c_1 und c_2 willkürliche Constanten bedeuten, während

$$(87.)\qquad b = \varphi(a)$$

zu setzen ist, worin φ eine willkürliche Function bedeutet; setzt man endlich den Werth für b in (84.) ein, so folgt

$$(88.)\qquad \varphi'(a) = \frac{1}{z_1^2-z_2^2},$$

also

$$(89.)\qquad a = \omega(z_1^2-z_2^2),$$

worin ω eine Function darstellt von der Art, dass nach (88.)

$$(90.)\qquad \varphi'[\omega(z_1^2-z_2^2)] = \frac{1}{z_1^2-z_2^2}$$

ist. Die allgemeinen Integrale des Differentialgleichungssystems (80.), welche *eine* willkürliche Function einer Variabelnverbindung enthalten, haben somit nach (81.) die Form

$$(91.)\qquad \begin{cases} u_1 = \omega(z_1^2-z_2^2)+\varphi[\omega(z_1^2-z_2^2)](z_1^2-z_2^2)+c_2(z_1^2+z_2^2)+c_1(z_1^2+z_2^2)^2, \\ u_2 = -\omega(z_1^2-z_2^2)-\varphi[\omega(z_1^2-z_2^2)](z_1^2-z_2^2)+c_2(z_1^2+z_2^2)+c_1(z_1^2+z_2^2)^2 \end{cases}$$

oder

$$(92.)\qquad \begin{cases} u_1 = \Omega_1(z_1^2-z_2^2)+c_2(z_1^2+z_2^2)+c_1(z_1^2+z_2^2)^2, \\ u_2 = \Omega_1(z_1^2-z_2^2)+c_2(z_1^2+z_2^2)+c_1(z_1^2+z_2^2)^2, \end{cases}$$

worin Ω_1 eine willkürliche Function bedeutet. Wendet man wiederum auf die Integralformen (92.) die eben durchgeführte Variation der Constanten an, so gehen die Gleichungen (74.) in

$$(93.)\qquad z_1^2+z_2^2+(z_1^2+z_2^2)^2\frac{dc_1}{dc_2} = 0$$

über, worin nach dem Obigen

$$(94.)\qquad c_1 = \psi(c_2)$$

zu setzen ist, wenn ψ eine willkürliche Function bedeutet; da sich dann aus (93.) die Beziehung

$$(95.)\qquad \psi'(c_2) = \frac{1}{z_1^2+z_2^2}$$

ergiebt, so werden, wie unmittelbar zu sehen, die Integralformen (92.) in

$$(96.)\qquad \begin{cases} u_1 = \Omega_1(z_1^2-z_2^2)+\Omega_2(z_1^2+z_2^2), \\ u_2 = -\Omega_1(z_1^2-z_2^2)+\Omega_2(z_1^2+z_2^2) \end{cases}$$

übergehen, worin Ω_1 und Ω_2 willkürliche Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten.

Wir gehen nun zur Behandlung des für partielle Differentialgleichungsysteme mit zwei unabhängigen Variabeln durchgeführten Verfahrens für den allgemeinen Fall partieller Differentialgleichungssysteme $m$ter Klasse mit μ unabhängigen Variabeln

$$(97.)\qquad \begin{cases} f_1\Big(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \\ \qquad\qquad \frac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\Big) = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_m\Big(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \\ \qquad\qquad \frac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\Big) = 0 \end{cases}$$

über, dessen vollständiges Integralsystem durch

$$(98.)\qquad \begin{cases} u_1 = F_1(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, a_{11}, \ldots, a_{1\mu}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu}) = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_m = F_m(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, a_{11}, \ldots, a_{1\mu}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu}) = 0 \end{cases}$$

dargestellt sein mag; es ist dann bekannt, dass das allgemeine Integralsystem die Form hat

$$(99.)\begin{cases} u_1 = \omega_1(z_1, \ldots, z_\mu, \varphi_1[\psi_{11}(z_1, \ldots, z_\mu), \psi_{12}(z_1, \ldots, z_\mu), \ldots, \psi_{1\mu-1}(z_1, \ldots, z_\mu)], \ldots, \\ \qquad \varphi_m[\psi_{m1}(z_1, \ldots, z_\mu), \ldots, \psi_{m\mu-1}(z_1, \ldots, z_\mu)]), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m = \omega_m(z_1, \ldots, z_\mu, \varphi_1[\psi_{11}(z_1 \ldots, z_\mu), \psi_{12}(z_1, \ldots, z_\mu), \ldots, \psi_{1\mu-1}(z_1, \ldots, z_\mu)], \ldots, \\ \qquad \varphi_m[\psi_{m1}(z_1, \ldots, z_\mu), \ldots, \psi_{m\mu-1}(z_1, \ldots, z_\mu)]), \end{cases}$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ willkürliche Functionen von je $\mu-1$ bestimmten selbständigen Variabelnverbindungen ψ bedeuten.

Da nun allgemein nachgewiesen worden, dass *alle* Integralsysteme von (97.) durch solche Variation der Constanten, welche den Differentialgleichungen

$$(100.)\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial z_a}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial a_{1\mu}}\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_a}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial z_a}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial a_{m\mu}}\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial z_a} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (a=1,2,\ldots,\mu) \\ \frac{\partial F_m}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial z_a}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial a_{1\mu}}\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_a}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial z_a}+\cdots+\frac{\partial F_m}{\partial a_{m\mu}}\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial z_a} = 0 \end{cases}$$

genügen, erhalten werden, so wollen wir zunächst aus den vollständigen Integralsystemen (98.) alle diejenigen Integralsysteme herzustellen suchen, welche nur *eine* willkürliche Function von $\mu-1$ selbständigen Variabelnevrbindungen von $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ enthalten und also in der Form dargestellt sein sollen

$$(101.)\begin{cases} u_1 = \Omega_1(z_1, \ldots, z_\mu, \varphi[\psi_1(z_1, \ldots, z_\mu), \ldots, \psi_{\mu-1}(z_1, \ldots, z_\mu)]), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m = \Omega_m(z_1, \ldots, z_\mu, \varphi[\psi_1(z_1, \ldots, z_\mu), \ldots, \psi_{\mu-1}(z_1, \ldots, z_\mu)]); \end{cases}$$

es werden somit die Gleichungen (100.) so zu integriren sein, dass den Gleichungen

$$(102.)\begin{cases} F_1(z_1, \ldots, z_\mu, a_{11}, \ldots, a_{1\mu}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu}) \\ \qquad = \Omega_1(z_1, \ldots, z_\mu, \varphi[\psi_1(z_1, \ldots, z_\mu), \ldots, \psi_{\mu-1}(z_1, \ldots, z_\mu)]), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(z_1, \ldots, z_\mu, a_{11}, \ldots, a_{1\mu}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu}) \\ \qquad = \Omega_m(z_1, \ldots, z_\mu, \varphi[\psi_1(z_1, \ldots, z_\mu), \ldots, \psi_{\mu-1}(z_1, \ldots, z_\mu)]), \end{cases}$$

identisch genügt wird.

Da sich die $a_{\alpha\beta}$ als Functionen von $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ ergeben, so kann man sich $z_1, z_2, \ldots, z_\mu, a_{21}, \ldots, a_{2\mu}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu}$ als Functionen von $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\mu}$ dargestellt denken, vorausgesetzt dass sich nicht $z_1, z_2, \ldots z_\mu$, also auch die anderen a-Grössen schon durch $\mu-1$ der Grössen $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\mu-1}$ ausdrücken, und wenn diese Werthe in die Gleichungen (102.) eingesetzt

so würde, wenn nicht sämmtliche A verschwinden, jede Functionaldeterminante der Form

$$(107.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_{\alpha_1}} & \frac{\partial x_2}{\partial z_{\alpha_1}} & \cdots & \frac{\partial x_{\mu-1}}{\partial z_{\alpha_1}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial z_{\alpha_2}} & \frac{\partial x_2}{\partial z_{\alpha_2}} & \cdots & \frac{\partial x_{\mu-1}}{\partial z_{\alpha_2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial z_{\alpha_{\mu-1}}} & \frac{\partial x_2}{\partial z_{\alpha_{\mu-1}}} & \cdots & \frac{\partial x_{\mu-1}}{\partial z_{\alpha_{\mu-1}}} \end{vmatrix} = 0$$

sein, worin die Indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mu-1}$ jede Combination der Zahlen 1, $2, \ldots, \mu$ zur $(\mu-1)$ten Klasse bedeuten, und sich somit eine Beziehung zwischen den Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}$

$$(108.)\qquad \chi(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}) = 0$$

ergeben — welcher Fall auszuschliessen war, da wir diejenigen Integrale herleiten wollten, welche eine willkürliche Function von $\mu-1$ selbständigen Variabelnverbindungen enthielten. Es müssen daher die eingeklammerten Grössen der Gleichung (105.) sämmtlich verschwinden, oder die Gleichungen bestehen:

$$(109.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{1\mu}}\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{m\mu}}\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial x_1} = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_{\mu-1}} + \cdots + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{1\mu}}\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial x_{\mu-1}} + \cdots + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial x_{\mu-1}} + \cdots + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{m\mu}}\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial x_{\mu-1}} = 0, \end{cases}$$

worin $\varrho = 1, 2, \ldots, m$ zu setzen ist.

Da sich aber sämmtliche a-Grössen als Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}$ ausdrücken lassen, so kann man dieselben auch als Functionen von

$$a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1\mu-1}$$

darstellen und die Gleichungen (109.) somit ersetzen durch

$$(110.)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{1\mu}}\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{11}} + \cdots + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial a_{11}} + \cdots + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{m\mu}}\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{11}}\right)\frac{\partial a_{11}}{\partial x_\sigma} \\ + \left(\frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{12}} + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{1\mu}}\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{12}} + \cdots + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial a_{12}} + \cdots + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{m\mu}}\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{12}}\right)\frac{\partial a_{12}}{\partial x_\sigma} \\ + \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ + \left(\frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{1\mu-1}} + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{1\mu}}\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{1\mu-1}} + \cdots + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial a_{1\mu-1}} + \cdots + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{m\mu}}\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{1\mu-1}}\right)\frac{\partial a_{1\mu-1}}{\partial x_\sigma} = 0, \end{cases}$$

worin $\varrho = 1, 2, \ldots, m$ und $\sigma = 1, 2, \ldots, \mu-1$ zu setzen ist. Da die

Functionaldeterminante

$$(111.)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} & \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_{1\mu-1}}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial a_{11}}{\partial x_{\mu-1}} & \frac{\partial a_{12}}{\partial x_{\mu-1}} & \cdots & \frac{\partial a_{1\mu-1}}{\partial x_{\mu-1}} \end{vmatrix} = 0$$

gegen die Voraussetzung eine Beziehung zwischen $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\mu-1}$ liefern würde, so muss wieder

$$(112.)\quad \begin{cases} \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{1\mu}} \frac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{11}} + \cdots + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{m1}} \frac{\partial a_{m1}}{\partial a_{11}} + \cdots + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{m\mu}} \frac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{11}} = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{1\mu-1}} + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{1\mu}} \frac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{1\mu-1}} + \cdots + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{m1}} \frac{\partial a_{m1}}{\partial a_{1\mu-1}} + \cdots + \frac{\partial F_\varrho}{\partial a_{m\mu}} \frac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{1\mu-1}} = 0 \end{cases}$$

sein, worin $\varrho = 1, 2, \ldots, m$ zu setzen ist, und die gegebenen Functionen $F_1, F_2, \ldots, F_m$ noch die Variabeln $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ enthalten. Denkt man sich nun aus den ersten zu $\varrho = 1$ gehörigen $\mu-1$ Gleichungen (112.) $z_2, z_3, \ldots, z_\mu$ durch die anderen in denselben vorkommenden Grössen in der Form

$$(113.)\quad \begin{cases} z_2 = H_2\Big(z_1, a_{11}, \ldots, a_{1\mu}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu}, \\ \qquad\qquad \frac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{11}}, \ldots, \frac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{1\mu-1}}, \ldots, \frac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{11}}, \ldots, \frac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{1\mu-1}}\Big), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ z_\mu = H_\mu\Big(z_1, a_{11}, \ldots, a_{1\mu}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu}, \\ \qquad\qquad \frac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{11}}, \ldots, \frac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{1\mu-1}}, \ldots, \frac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{11}}, \ldots, \frac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{1\mu-1}}\Big) \end{cases}$$

ausgedrückt, so ergeben sich, wenn diese Werthe in die $(m-1)(\mu-1)$ übrigen Gleichungen (112.) eingesetzt werden, Beziehungsgleichungen, welche die Grössen

$$a_{11}, \ldots, a_{1\mu}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu}, \frac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{11}}, \ldots, \frac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{1\mu-1}}, \ldots, \frac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{11}}, \ldots, \frac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{1\mu-1}} \text{ und } z_1$$

enthalten, und da sämmtliche a-Grössen reine Functionen von $a_{11}, \ldots, a_{1\mu-1}$, und diese im Allgemeinen Functionen bestimmter Variabelnverbindungen (103.) von $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ sind, so werden die so erhaltenen Gleichungen

$$
(114.)\quad \begin{cases}
h_1\Big(z_1,\ a_{11},\ \ldots,\ a_{1\mu},\ \ldots,\ a_{m1},\ \ldots,\ a_{m\mu}, \\
\qquad \dfrac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{11}},\ \ldots,\ \dfrac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{1\mu-1}},\ \ldots,\ \dfrac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{11}},\ \ldots,\ \dfrac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{1\mu-1}}\Big) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
h_{(m-1)(\mu-1)}\Big(z_1,\ a_{11},\ \ldots,\ a_{1\mu},\ \ldots,\ a_{m1},\ \ldots,\ a_{mu}, \\
\qquad \dfrac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{11}},\ \ldots,\ \dfrac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{1\mu-1}},\ \ldots,\ \dfrac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{11}},\ \ldots,\ \dfrac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{1\mu-1}}\Big) = 0
\end{cases}
$$

für jeden Werth von z_1 bestehen, und somit beliebig oft nach z_1 differentiirt werden dürfen, wenigstens so lange als nicht z_1 aus den analytisch gegebenen Ausdrücken $h_1, \ldots, h_{(m-1)(\mu-1)}$ verschwindet. Stellt man nun wieder genau, wie es oben für den Fall $\mu = 2$ geschehen, durch Differentiation nach z_1 und Elimination dieser Grösse eine Reihe von unter einander unabhängigen Bedingungsgleichungen zwischen den a-Grössen und deren partiellen Differentialquotienten her

$$
(115.)\quad \begin{cases}
k_1\Big(a_{11},\ \ldots,\ a_{1\mu},\ \ldots,\ a_{m1},\ \ldots,\ a_{m\mu}, \\
\qquad \dfrac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{11}},\ \ldots,\ \dfrac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{1\mu-1}},\ \ldots,\ \dfrac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{11}},\ \ldots,\ \dfrac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{1\mu-1}}\Big) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k_\nu\Big(a_{11},\ \ldots,\ a_{1\mu},\ \ldots,\ a_{m1},\ \ldots,\ a_{m\mu}, \\
\qquad \dfrac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{11}},\ \ldots,\ \dfrac{\partial a_{1\mu}}{\partial a_{1\mu-1}},\ \ldots,\ \dfrac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{11}},\ \ldots,\ \dfrac{\partial a_{m\mu}}{\partial a_{1\mu-1}}\Big) = 0,
\end{cases}
$$

so ist einerseits ersichtlich, dass die Zahl der von einander unabhängigen Differentialgleichungen für die a-Grössen als Functionen von $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\mu-1}$ nicht grösser als die Anzahl $(m-1)\mu+1$ der Grössen

$$a_{1\mu},\quad a_{21},\quad \ldots,\quad a_{2\mu},\quad \ldots,\quad a_{m1},\quad \ldots,\quad a_{m\mu}$$

sein darf, da die letzteren den obigen Auseinandersetzungen zufolge als reine Functionen von $a_{11}, \ldots, a_{1\mu-1}$ darstellbar sind, andererseits darf aber auch die Anzahl jener unabhängigen Gleichungen die Zahl $(m-1)\mu+1$ nicht erreichen, da, wenn dies der Fall wäre, die allgemeinen Integrale dieses partiellen Differentialgleichungssystems, da dasselbe nur $\mu-1$ unabhängige Variabeln $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\mu-1}$ enthält, nur willkürliche Functionen von $\mu-2$ Variabelnverbindungen einschliessen würden; es muss also $\nu = (m-1)\mu$ sein, so dass man $a_{1\mu}$ einer willkürlichen Function von a_{11}, $a_{12}, \ldots, a_{1\mu-1}$ gleichsetzen darf, und das Differentialgleichungssystem (115.)

Fassen wir die gewonnenen Resultate zusammen, so ergiebt sich der folgende Satz:

Kennt man ein vollständiges Integralsystem eines partiellen Differentialgleichungssystems mter Klasse mit μ unabhängigen Variabeln, so erhält man im Allgemeinen mit Hülfe der Variation der Constanten durch successive Herleitung von Integralsystemen partieller Differentialgleichungssysteme mit $\mu-1$ unabhängigen Variabeln, welche resp. $(m-1)\mu$, $(m-2)\mu$, ..., 0 Constanten enthalten, das allgemeine Integralsystem mit m willkürlichen Functionen von $\mu-1$ Variabelnverbindungen der μ unabhängigen Variabeln.

Für Differentialgleichungen erster Klasse mit μ unabhängigen Variabeln führt diese Methode, wie wir früher gesehen haben, nur zu Differentialgleichungen 0ter Klasse, also zur Auflösung von Gleichungen, für Differentialgleichungssysteme $m$ter Klasse mit einer unabhängigen Variabeln — also für totale Differentialgleichungssysteme — zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme $(m-1)$ter, $(m-2)$ter, ..., 0ter Klasse.

Sei z. B. das partielle Differentialgleichungssystem mit drei unabhängigen Variabeln gegeben

$$(117.)\quad \begin{cases} (1-2z_2)\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}+(1-2z_2)\dfrac{\partial u_2}{\partial z_1}-2\dfrac{\partial u_1}{\partial z_2}-2\dfrac{\partial u_2}{\partial z_2}+(1+2z_2)\dfrac{\partial u_1}{\partial z_3}+(1+2z_2)\dfrac{\partial u_2}{\partial z_3}=0,\\ (1-2z_3)\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}-(1-2z_3)\dfrac{\partial u_2}{\partial z_1}-(1+2z_3)\dfrac{\partial u_1}{\partial z_2}+(1+2z_3)\dfrac{\partial u_2}{\partial z_2}-2\dfrac{\partial u_1}{\partial z_3}+2\dfrac{\partial u_2}{\partial z_3}=0, \end{cases}$$

dessen vollständiges Integralsystem mit den 6 willkürlichen Constanten α, β, γ, δ, ε, η

$$(118.)\quad \begin{cases} u_1 = \eta z_1^2+(\eta-\gamma)z_2^2+(\eta-\varepsilon)z_3^2+2\eta z_1z_3-2\eta z_2z_3-2\eta z_1z_2\\ \qquad +(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)z_1+(\beta-\delta+\varepsilon)z_2+(\beta-\gamma+\delta)z_3+\alpha,\\ u_2 = -\eta z_1^2-(\eta+\gamma)z_2^2-(\eta-\varepsilon)z_3^2-2\eta z_1z_3-2\eta z_2z_3+2\eta z_1z_2\\ \qquad +(\beta+\gamma-\delta-\varepsilon)z_1+(\beta+\delta-\varepsilon)z_2+(\beta-\gamma-\delta)z_3+\alpha \end{cases}$$

ist, so gehen die Gleichungen (112.), wenn $a_{11}=\beta$, $a_{12}=\gamma$ gesetzt werden, in

$$(119.)\quad \begin{cases} z_1+z_2+z_3+\dfrac{\partial\alpha}{\partial\beta}+(z_1-z_2+z_3)\dfrac{\partial\delta}{\partial\beta}+(-z_3^2+z_1+z_2)\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\beta}+(z_1-z_2+z_3)^2\dfrac{\partial\eta}{\partial\beta}=0,\\ -z_2^2+z_1-z_3+\dfrac{\partial\alpha}{\partial\gamma}+(z_1-z_2+z_3)\dfrac{\partial\delta}{\partial\gamma}+(-z_3^2+z_1+z_2)\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}+(z_1-z_2+z_3)^2\dfrac{\partial\eta}{\partial\gamma}=0,\\ z_1+z_2+z_3+\dfrac{\partial\alpha}{\partial\beta}-(z_1-z_2+z_3)\dfrac{\partial\delta}{\partial\beta}-(-z_3^2+z_1+z_2)\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\beta}-(z_1-z_2+z_3)^2\dfrac{\partial\eta}{\partial\beta}=0,\\ -z_2^2+z_1-z_3+\dfrac{\partial\alpha}{\partial\gamma}-(z_1-z_2+z_3)\dfrac{\partial\delta}{\partial\gamma}-(-z_3^2+z_1+z_2)\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}-(z_1-z_2+z_3)^2\dfrac{\partial\eta}{\partial\gamma}=0, \end{cases}$$

oder, wie durch Verbindung je zweier zu ersehen, einfacher in

$$(120.)\quad \begin{cases} z_1+z_2+z_3+\dfrac{\partial\alpha}{\partial\beta} = 0, \\ -z_2^2+z_1-z_3+\dfrac{\partial\alpha}{\partial\gamma} = 0, \\ (z_1-z_2+z_3)\dfrac{\partial\delta}{\partial\beta}+(-z_3^2+z_1+z_2)\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\beta}+(z_1-z_2+z_3)^2\dfrac{\partial\eta}{\partial\beta} = 0, \\ (z_1-z_2+z_3)\dfrac{\partial\delta}{\partial\gamma}+(-z_3^2+z_1+z_2)\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}+(z_1-z_2+z_2)^2\dfrac{\partial\eta}{\partial\gamma} = 0 \end{cases}$$

über. Setzt man die Werthe von z_1 und z_3 aus den beiden ersten Gleichungen (120.) in die beiden letzten ein und differentiirt dieselben dreimal nach einander nach z_2, so sieht man leicht, dass die resultirenden partiellen Differentialgleichungen als nothwendig zu erfüllende Bedingungen liefern:

$$(121.)\quad \frac{\partial\delta}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\delta}{\partial\gamma}=0,\quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma}=0,\quad \frac{\partial\eta}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\eta}{\partial\gamma}=0;$$

es werden somit δ, ε, η, da sie reine Functionen von β und γ sein mussten, Constanten bleiben; für die beiden ersten Gleichungen (120.) musste nach den obigen allgemeinen Auseinandersetzungen

$$(122.)\quad \alpha = \varphi(\beta,\ \gamma)$$

gesetzt werden, worin φ eine willkürliche Function von β und γ bedeutet, welch' letztere Grössen als Functionen von z_1, z_2, z_3 aus den beiden Gleichungen zu bestimmen sind

$$(123.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi(\beta,\ \gamma)}{\partial\beta} = -(z_1+z_2+z_3), \\ \dfrac{\partial\varphi(\beta,\ \gamma)}{\partial\gamma} = z_2^2-z_1+z_3, \end{cases}$$

woraus sich

$$(124.)\quad \begin{cases} \beta = f_1(z_1+z_2+z_3,\ z_2^2-z_1+z_3), \\ \gamma = f_2(z_1+z_2+z_3,\ z_2^2-z_1+z_3) \end{cases}$$

ergeben werden. Setzt man diese Werthe in das vollständige Integralsystem (118.) ein, so erhält man, wie unmittelbar zu sehen,

$$(125.)\quad \begin{cases} u_1 = \varphi_1(z_1+z_2+z_3,\ z_2^2-z_1^2+z_3)+\eta(z_1-z_2+z_3)^2+(\delta+\varepsilon)z_1+(\varepsilon-\delta)z_2+\delta z_3-\varepsilon z_3^2, \\ u_2 = \varphi_1(z_1+z_2+z_3,\ z_2^2-z_1^2+z_3)-\eta(z_1-z_2+z_3)^2-(\delta+\varepsilon)z_1-(\varepsilon-\delta)z_2-\delta z_3+\varepsilon z_3^2, \end{cases}$$

worin φ_1 eine willkürliche Function der beiden eingeschlossenen Grössen bedeutet. Geht man nunmehr wieder von dem Integralsysteme (125.) aus

und lässt für δ, ε, η in genau derselben Weise die angegebene Variation der Constanten eintreten, so gehen die Gleichungen (112.), wenn $a_{11} = \delta$, $a_{12} = \varepsilon$ gesetzt wird, in

$$(126.)\quad \begin{cases} 1+(z_1-z_2+z_3)\dfrac{\partial\eta}{\partial\delta} = 0, \\ z_1+z_2-z_3^2+(z_1-z_2+z_3)^2\dfrac{\partial\eta}{\partial\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

über, woraus, wenn wieder

$$(127.)\quad \eta = \psi(\delta, \varepsilon)$$

gesetzt wird und ψ eine willkürliche Function bedeutet,

$$(128.)\quad \begin{cases} \delta = \omega_1(z_1-z_2+z_3,\ z_1+z_2-z_3^2), \\ \varepsilon = \omega_2(z_1-z_2+z_3,\ z_1+z_2-z_3^2) \end{cases}$$

folgt, und es geht sonach das Integralsystem (125.) in das *allgemeine* Integralsystem der Differentialgleichungen (117.) über

$$(129.)\quad \begin{cases} u_1 = \varphi_1(z_1+z_2+z_3,\ z_1-z_2^2-z_3)+\varphi_2(z_1-z_2+z_3,\ z_1+z_2-z_3^2), \\ u_2 = \varphi_1(z_1+z_2+z_3,\ z_1-z_2^2-z_3)-\varphi_2(z_1-z_2+z_3,\ z_1+z_2-z_3^2). \end{cases}$$

Um das eben erläuterte Verfahren zur Herleitung der allgemeinen Integralsysteme beliebiger partieller Differentialgleichungsysteme aus den vollständigen Integralen noch in einem Punkte zu ergänzen, mag zunächst eine Bemerkung über die Transformation eines beliebigen partiellen Differentialgleichungsystems in ein anderes vorausgeschickt werden, welches die abhängigen Variabeln nicht mehr explicite enthält.

Sei wieder das partielle Differentialgleichungsystem $m$ter Klasse gegeben

$$(130.)\quad \begin{cases} f_1\left(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_m, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\right) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m\left(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_m, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\right) = 0, \end{cases}$$

und sei

$$(131.)\quad \begin{cases} \Omega_1(z_1, z_2, \ldots, z_\mu, u_1, u_2, \ldots, u_m) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Omega_m(z_1, z_2, \ldots, z_m, u_1, u_2, \ldots, u_m) = 0 \end{cases}$$

irgend ein Integralsystem desselben von der Art, dass die nach den u_1.

$u_2, \ldots, u_m$ genommene Functionaldeterminante

$$(132.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Omega_m}{\partial u_1} & \frac{\partial \Omega_m}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \Omega_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} = D$$

nicht identisch verschwindet, so folgt aus (131.)

$$(133.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial z_\lambda} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial z_\lambda} + \cdots + \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial z_\lambda} = -\frac{\partial \Omega_1}{\partial z_\lambda}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \frac{\partial \Omega_m}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial z_\lambda} + \frac{\partial \Omega_m}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial z_\lambda} + \cdots + \frac{\partial \Omega_m}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial z_\lambda} = -\frac{\partial \Omega_m}{\partial z_\lambda}, \end{cases}$$

oder, wenn

$$(134.)\qquad -\begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_{\varrho-1}} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_\lambda} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_{\varrho+1}} & \cdots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Omega_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \Omega_m}{\partial u_{\varrho-1}} & \frac{\partial \Omega_m}{\partial z_\lambda} & \frac{\partial \Omega_m}{\partial u_{\varrho+1}} & \cdots & \frac{\partial \Omega_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} = D_{\varrho\lambda}$$

gesetzt wird,

$$(135.)\qquad \frac{\partial u_\varrho}{\partial z_\lambda} = \frac{D_{\varrho\lambda}}{D}.$$

Setzt man nun diese Ausdrücke für die partiellen Differentialquotienten in die Differentialgleichungen (130.) ein, so erhält man

$$(136.)\qquad \begin{cases} f_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{D_{11}}{D}, \ldots, \frac{D_{1\mu}}{D}, \ldots, \frac{D_{m1}}{D}, \ldots, \frac{D_{m\mu}}{D}\right) = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ f_m\left(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{D_{11}}{D}, \ldots, \frac{D_{1\mu}}{D}, \ldots, \frac{D_{m1}}{D}, \ldots, \frac{D_{m\mu}}{D}\right) = 0 \end{cases}$$

oder nach (132.) und (134.)

$$(137.)\qquad \begin{cases} F_1\Big(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_\mu}, \\ \qquad \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_m}, \ldots, \frac{\partial \Omega_m}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial \Omega_m}{\partial u_m}\Big) = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ F_m\Big(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_\mu}, \\ \qquad \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_m}, \ldots, \frac{\partial \Omega_m}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial \Omega_m}{\partial u_m}\Big) = 0, \end{cases}$$

worin $z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m$ als unabhängige, $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m$ als abhängige Variabeln betrachtet werden können;

es kann somit jedes partielle Differentialgleichungssystem mter Klasse mit μ unabhängigen Variabeln in ein anderes partielles Differentialgleichungsystem mter Klasse mit $m+\mu$ unabhängigen Variabeln, welche aus den früheren abhängigen und unabhängigen Variabeln bestehen, von der Art transformirt werden, dass die neuen m abhängigen Variabeln in demselben nicht explicite vorkommen.

Zunächst ist nun einleuchtend, dass aus jedem Integralsystem des partiellen Differentialgleichungsystems (137.) auch ein Integralsystem der partiellen Differentialgleichungen (130.) sich ergiebt; denn sei ein solches Integralsystem

$$(138.)\quad \begin{cases} \Omega_1 = \omega_1(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Omega_m = \omega_m(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m), \end{cases}$$

so setze man

$$(139.)\quad \omega_1(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m) = 0, \ \ldots, \ \omega_m(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m) = 0,$$

und es werden die aus diesen Gleichungen sich für $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ergebenden Functionen von $z_1, \ldots, z_\mu$ ein Integralsystem der Differentialgleichungen (130.) liefern, da nach (139.) vermöge (138.)

$$\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_\lambda} = \frac{D_{\varrho\lambda}}{D}$$

sich ergiebt, und somit die Gleichungen (136.) in das partielle Differentialgleichungssystem (130.) übergehen. Aber man sieht auch leicht, dass in dieser Weise aus dem vollständigen Integralsysteme von (137.) das vollständige Integralsystem der Differentialgleichungen (130.) folgt. Sei nämlich das vollständige Integralsystem von (137.), welches für die m abhängigen Variabeln $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m$, weil diese nicht explicite vorkommen, je eine Constante additiv enthalten muss,

$$(140.)\quad \begin{cases} \Omega_1 = \omega_1(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, c_1, c_2, \ldots, c_{m(\mu+m-1)}) + C_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Omega_m = \omega_m(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, c_1, c_2, \ldots, c_{m(\mu+m-1)}) + C_m, \end{cases}$$

so wird nach der Definition des vollständigen Integralsystems die Functionaldeterminante von je $m(\mu+m-1)$ Ausdrücken der partiellen Differentialquotienten für jeden Werth von ϱ aus der Reihe $1, 2, \ldots, m$

$$(A.)\quad \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial z_\mu}, \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial u_{\varrho-1}}, \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial u_{\varrho+1}}, \ldots, \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial u_m} \ (\text{für } \alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

in Bezug auf die Constanten

$$c_1, \quad c_2, \quad \dots, \quad c_{m(\mu+m-1)}$$

nicht identisch Null sein dürfen; setzt man nun

$$(141.)\quad \begin{cases} \omega_1(z_1, \dots, z_\mu, u_1, \dots, u_m, c_1, c_2, \dots, c_{m(\mu+m-1)}) + C_1 = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \omega_m(z_1, \dots, z_\mu, u_1, \dots, u_m, c_1, c_2, \dots, c_{m(\mu+m-1)}) + C_m = 0, \end{cases}$$

so ergeben sich $u_1, u_2, \dots, u_m$ als Functionen von $z_1, z_2, \dots, z_\mu$ mit $m(\mu+m)$ Constanten, unter denen eine Anzahl überzähliger Constanten sich befinden wird, und wir wollen beweisen, dass die Gleichungen (141.) ein vollständiges Integralsystem der Differentialgleichungen (130.) definiren. Zu diesem Zwecke ist nur zu zeigen, dass die Functionaldeterminante der $m\mu$ Grössen

$$(B.)\quad \frac{\partial\omega_\alpha}{\partial z_\lambda} + \frac{\partial\omega_\alpha}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial z_\lambda} + \frac{\partial\omega_\alpha}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial z_\lambda} + \dots + \frac{\partial\omega_\alpha}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial z_\lambda}$$

oder

$$(C.)\quad \frac{\partial\Omega_\alpha}{\partial z_\lambda} + \frac{\partial\Omega_\alpha}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial z_\lambda} + \frac{\partial\Omega_\alpha}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial z_\lambda} + \dots + \frac{\partial\Omega_\alpha}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial z_\lambda} \quad (\text{für } \alpha=1,2,\dots,m;\ \lambda=1,2,\dots,\mu)$$

in Bezug auf je $m\mu$ der $m(m+\mu-1)$ Constanten $c_1, c_2, \dots, c_{m(m+\mu-1)}$ genommen nicht identisch verschwindet; aber dies ist unmittelbar ersichtlich, da die Functionaldeterminante der Grössen $(C.)$ sich bei passender Wahl der Grössen

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_\lambda}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial z_\lambda}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u_m}{\partial z_\lambda}$$

in die aus den Grössen $(A.)$ gebildeten Functionaldeterminanten zerlegen lässt, und diese Determinanten, welche dann einzeln verschwinden müssten, nicht identisch Null sein konnten, weil die Grössen $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ ein vollständiges Integralsystem der Differentialgleichungen (137.) bilden sollten. *Das vollständige Integralsystem der Differentialgleichungen* (137.) *liefert also das vollständige Integralsystem der Differentialgleichungen* (130.).

Sei z. B. die partielle Differentialgleichung mit den beiden unabhängigen Variabeln z_1 und z_2 vorgelegt

$$(142.)\qquad u_1 - (z_1+1)\frac{\partial u_1}{\partial z_1} - (z_2+1)\frac{\partial u_1}{\partial z_2} = 0,$$

so lautet die transformirte Differentialgleichung (137.)

$$(143.)\qquad u_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial u_1} + (z_1+1)\frac{\partial\Omega_1}{\partial z_1} + (z_2+1)\frac{\partial\Omega_1}{\partial z_2} = 0;$$

nun ist das vollständige Integral der letzteren

(144.) $$\Omega_1 = \frac{c_1 u_1}{z_2+1} + \frac{c_2(z_1+1)}{z_2+1} + C_1,$$

und wenn man $\Omega_1 = 0$ setzt, so ergiebt sich

$$\frac{c_1 u_1}{z_2+1} + \frac{c_2(z_1+1)}{z_2+1} + C_1 = 0,$$

oder wenn

$$-\frac{c_2}{c_1} = k_1, \quad -\frac{C_1}{c_1} = k_2$$

gesetzt wird,

(145.) $$u_1 = k_1(z_1+1) + k_2(z_2+1)$$

als vollständiges Integral der Differentialgleichung (142.).

Wir behaupten aber auch umgekehrt, *dass, wenn das vollständige Integralsystem der Differentialgleichungen* (130.) *bekannt ist, daraus das vollständige Integralsystem der Differentialgleichungen* (137.) *hergeleitet werden kann.*

Sei nämlich

(146.) $$\begin{cases} \Omega_1(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, a_{11}, \ldots, a_{1\mu}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu}) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Omega_m(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, a_{11}, \ldots, a_{1\mu}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu}) = 0 \end{cases}$$

ein vollständiges Integralsystem der Differentialgleichungen (130.), so sind die Integralfunctionen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m$ als Functionen von $z_1, \ldots, z_\mu$, $u_1, \ldots, u_m$ aufgefasst nach den obigen Auseinandersetzungen ein Integralsystem der Differentialgleichungen (137.); rechnet man aus diesen m Gleichungen (146.) die Grössen $a_{1\mu}, a_{2\mu}, \ldots, a_{m\mu}$ aus, so dass die Gleichungen (146.) ersetzt werden durch

(147.) $$\begin{cases} \omega_1(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, a_{11}, \ldots, a_{1\mu-1}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu-1}) - a_{1\mu} = 0, \\ \omega_2(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, a_{11}, \ldots, a_{1\mu-1}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu-1}) - a_{2\mu} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_m(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, a_{11}, \ldots, a_{1\mu-1}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu-1}) - a_{m\mu} = 0, \end{cases}$$

so werden nach dem Früheren auch

(148.) $$\begin{cases} \Omega_1 = \omega_1(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, a_{11}, \ldots, a_{1\mu-1}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu-1}) - a_{1\mu}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Omega_m = \omega_m(z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, a_{11}, \ldots, a_{1\mu-1}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu-1}) - a_{m\mu} \end{cases}$$

ein Integralsystem der Differentialgleichungen (137.) bilden. Bildet man

nun die Functionen

$$(149.)\quad \begin{cases} \Omega_1' = \lambda_{11}\Omega_1 + \lambda_{12}\Omega_2 + \cdots + \lambda_{1m}\Omega_m, \\ \Omega_2' = \lambda_{21}\Omega_1 + \lambda_{22}\Omega_2 + \cdots + \lambda_{2m}\Omega_m, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Omega_m' = \lambda_{m1}\Omega_1 + \lambda_{m2}\Omega_2 + \cdots + \lambda_{mm}\Omega_m, \end{cases}$$

worin die λ willkürliche Constanten bedeuten, deren Determinante nicht verschwindet, so werden auch diese $\Omega_1', \Omega_2', \ldots, \Omega_m'$ Integralfunctionen des Differentialgleichungsystems (137.) sein, weil, wie unmittelbar zu sehen, die Ausdrücke (135.) dieselben bleiben, indem die Functionaldeterminante der λ-Grössen herausfällt. Aus den Gleichungen (148.) und (149.) folgt aber, dass in den Integralfunctionen $\Omega_1', \Omega_2', \ldots, \Omega_m'$ die willkürlichen Constanten enthalten sind:

$$\begin{array}{l} a_{11},\ \ldots,\ a_{1\mu-1},\ \ldots,\ a_{m1},\ \ldots,\ a_{m\mu-1}, \\ \lambda_{1},\ \ldots,\ \lambda_{1m},\ \ldots,\ \lambda_{m1},\ \ldots,\ \lambda_{mm}, \\ A_1 = \lambda_{11}a_{1\mu} + \lambda_{12}a_{2\mu} + \cdots + \lambda_{1m}a_{m\mu}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_m = \lambda_{m1}a_{1\mu} + \lambda_{m2}a_{2\mu} + \cdots + \lambda_{mm}a_{m\mu}, \end{array}$$

deren Anzahl $m(m+\mu)$ beträgt; dieselben bilden also, wie aus der oben gegebenen Definition leicht hervorgeht, ein vollständiges Integralsystem der Differentialgleichungen (137.).

Wir sind somit im Stande für die beiden aus einander transformirten Differentialgleichungsysteme das vollständige Integralsystem des einen aus dem andern herzuleiten.

Sei z. B. die partielle Differentialgleichung

$$(150.)\qquad u_1 - z_1\frac{\partial u_1}{\partial z_1} - z_2\frac{\partial u_1}{\partial z_2} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)^2 + \frac{\partial u_1}{\partial z_2}$$

vorgelegt, deren vollständiges Integral

$$(151.)\qquad u_1 = a_{11}z_1 + a_{11}^2 + a_{12}(z_2+1)$$

ist, so lautet die transformirte Differentialgleichung, in welcher die abhängige Variable nicht vorkommt,

$$(152.)\quad u_1\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1}\right)^2 + z_1\frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1}\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} + z_2\frac{\partial \Omega_1}{\partial z_2}\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1} = \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1}\right)^2 - \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_2}\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_1};$$

um nun das vollständige Integral dieser Differentialgleichung zu finden, müssen wir nach der oben angegebenen Methode die Gleichung (151.)

in die Form setzen

$$(153.)\qquad \frac{u_1-a_{11}z_1-a_{11}^2}{z_2+1}+a_{12} = 0,$$

und es wird sodann nach (148.) und (149.) das vollständige Integral der Differentialgleichung (152.) in der Form dargestellt sein

$$(154.)\qquad \Omega_1' = \lambda_{11}\frac{u_1-a_{11}z_1-a_{11}^2}{z_2+1}+A_1,$$

worin λ_{11}, a_{11}, A_1 die drei willkürlichen Constanten bedeuten.

Nach den eben gemachten Auseinandersetzungen kann somit die Durchführung des oben besprochenen Verfahrens, aus dem vollständigen Integralsysteme eines Systemes partieller Differentialgleichungen beliebiger Klasse das allgemeine Integralsystem herzuleiten, auf ein solches partielles Differentialgleichungsystem irgend welcher Klasse beschränkt werden, in welchem die abhängigen Variabeln nicht explicite enthalten sind, da aus dem vollständigen Integralsysteme des einen stets das vollständige Integralsystem des andern unmittelbar herleitbar ist; dabei muss jedoch bemerkt werden, dass, wenn für das ursprüngliche partielle Differentialgleichungsystem (130.) aus dem vollständigen Integralsysteme desselben durch Variation der Constanten dasjenige Integralsystem wird hergeleitet werden sollen, welches für $z_1 = a$ die Werthe

$$(u_1)_{z_1=a} = \chi_1(z_2,\ z_3,\ \dots,\ z_\mu),$$
$$(u_2)_{z_1=a} = \chi_2(z_2,\ z_3,\ \dots,\ z_\mu),\quad \dots,\quad (u_m)_{z_1=a} = \chi_m(z_2,\ z_3,\ \dots,\ z_\mu)$$

annimmt, worin χ_1, χ_2, $\dots$, χ_m bestimmt gegebene Functionen bedeuten, aus dem nach dem Vorigen unmittelbar herleitbaren vollständigen Integralsysteme des Differentialgleichungsystems (137.) durch Variation der Constanten dasjenige Integralsystem wird abgeleitet werden müssen, dessen Elemente für $z_1 = a$ die Werthe

$$(\Omega_1)_{z_1=a} = u_1-\chi_1(z_2,\ z_3,\ \dots,\ z_\mu),\ \dots,\ (\Omega_m)_{z_1=a} = u_m-\chi_m(z_2,\ z_3,\ \dots,\ z_\mu)$$

annehmen, da die Integralelemente des Differentialgleichungsystems (137.) gleich Null gesetzt das gesuchte Integralsystem des vorgelegten Differentialgleichungsystems liefern.

Sei also nunmehr das vorgelegte partielle Differentialgleichungsystem $m$ter Klasse mit μ unabhängigen Variabeln, in welchem die m abhängigen Variabeln selbst nicht explicite vorkommen,

$$(155.)\left\{\begin{array}{l} f_1\left(z_1, \ldots, z_\mu, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\right) = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ f_m\left(z_1, \ldots, z_\mu, \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial z_\mu}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}\right) = 0, \end{array}\right.$$

und werde nunmehr die Aufgabe gestellt, aus dem als bekannt angenommenen vollständigen Integralsysteme desselben

$$(156.)\left\{\begin{array}{l} u_1 = \omega_1(z_1, \ldots, z_\mu, a_{11}, \ldots, a_{1\mu-1}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu-1}) + a_{1\mu}, \\ u_2 = \omega_2(z_1, \ldots, z_\mu, a_{11}, \ldots, a_{1\mu-1}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu-1}) + a_{2\mu}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ u_m = \omega_m(z_1, \ldots, z_\mu, a_{11}, \ldots, a_{1\mu-1}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu-1}) + a_{m\mu} \end{array}\right.$$

dasjenige Integralsystem herzuleiten, welches der Bedingung unterliegt, dass

$$(157.)\left\{\begin{array}{c} (u_1)_{z_1=a} = \varphi_1(z_2, z_3, \ldots, z_\mu), \\ (u_2)_{z_1=a} = \varphi_2(z_2, z_3, \ldots, z_\mu), \ldots, (u_m)_{z_1=a} = \varphi_m(z_2, z_3, \ldots, z_\mu) \end{array}\right.$$

wird, worin a ein gegebener Werth von z_1 ist und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ beliebige, aber bestimmt gegebene Functionen von $z_2, z_3, \ldots, z_\mu$ sind.

Da nach den früheren Auseinandersetzungen die Grössen

$$a_{11}, \ldots, a_{1\mu}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu}$$

durch Variation der Constanten so als Integrale der Differentialgleichungen

$$(158.)\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \omega_1}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial z_a}+\cdots+\frac{\partial \omega_1}{\partial a_{1\mu-1}}\frac{\partial a_{1\mu-1}}{\partial z_a}+\cdots+\frac{\partial \omega_1}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial z_a}+\cdots+\frac{\partial \omega_1}{\partial a_{m\mu-1}}\frac{\partial a_{m\mu-1}}{\partial z_a}+\frac{\partial a_{1\mu}}{\partial z_a} = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \frac{\partial \omega_m}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial z_a}+\cdots+\frac{\partial \omega_m}{\partial a_{1\mu-1}}\frac{\partial a_{1\mu-1}}{\partial z_a}+\cdots+\frac{\partial \omega_m}{\partial a_{m1}}\frac{\partial a_{m1}}{\partial z_a}+\cdots+\frac{\partial \omega_m}{\partial a_{m\mu-1}}\frac{\partial a_{m\mu-1}}{\partial z_a}+\frac{\partial a_{m\mu}}{\partial z_a} = 0 \end{array}\right.$$

bestimmt werden können, dass jedes Integralsystem der Differentialgleichungen (155.) sich durch Substitution der gefundenen Functionalwerthe für $a_{11}, \ldots, a_{1\mu}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu}$ aus den Integralformen (156.) ergiebt, so können wir von vornherein

$$(159.)\left\{\begin{array}{l} \qquad u_1 = \omega_1(z_1, \ldots, z_\mu, a_{11}, \ldots, a_{1\mu-1}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu-1}) \\ -\omega_1(a, a_2^{(1)}, \ldots, a_\mu^{(1)}, a_{11}, \ldots, a_{1\mu-1}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu-1}) + \varphi_1(a_2^{(1)}, \ldots, a_\mu^{(1)}), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \qquad u_m = \omega_m(z_1, \ldots, z_\mu, a_{11}, \ldots, a_{1\mu-1}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu-1}) \\ -\omega_m(a, a_2^{(m)}, \ldots, a_\mu^{(m)}, a_{11}, \ldots, a_{1\mu-1}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu-1}) + \varphi_m(a_2^{(m)}, \ldots, a_\mu^{(m)}) \end{array}\right.$$

setzen und haben jetzt nur die Grössen

$$a_{11}, \ldots, a_{1\mu-1}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{m\mu-1}, a_2^{(1)}, \ldots, a_\mu^{(1)}, \ldots, a_2^{(m)}, \ldots, a_\mu^{(m)}$$

so als Functionen von $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ zu bestimmen, dass den Differentialgleichungen

$$(160.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\substack{\lambda=1,2,\ldots,m\\ \nu=1,2,\ldots,\mu-1}} \left[\dfrac{\partial\omega_1(z_1,\ldots)}{\partial a_{\lambda\nu}} - \dfrac{\partial\omega_1(a,\ldots)}{\partial a_{\lambda\nu}}\right]\dfrac{\partial a_{\lambda\nu}}{\partial z_\alpha} \\ \qquad - \sum\limits_{i=2,3,\ldots,\mu} \left[\dfrac{\partial\omega_1(a,\ldots)}{\partial a_i^{(1)}} - \dfrac{\partial\varphi_1(a_2^{(1)},\ldots)}{\partial a_i^{(1)}}\right]\dfrac{\partial a_i^{(1)}}{\partial z_\alpha} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{\substack{\lambda=1,2,\ldots,m\\ \nu=1,2,\ldots,\mu-1}} \left[\dfrac{\partial\omega_m(z_1,\ldots)}{\partial a_{\lambda\nu}} - \dfrac{\partial\omega_m(a,\ldots)}{\partial a_{\lambda\nu}}\right]\dfrac{\partial a_{\lambda\nu}}{\partial z_\alpha} \\ \qquad - \sum\limits_{i=2,3,\ldots,\mu} \left[\dfrac{\partial\omega_m(a,\ldots)}{\partial a_i^{(m)}} - \dfrac{\partial\varphi_m(a_2^{(m)},\ldots)}{\partial a_i^{(m)}}\right]\dfrac{\partial a_i^{(m)}}{\partial z_\alpha} = 0, \end{cases}$$

in welchen $\alpha = 1, 2, \ldots, \mu$ zu setzen ist, derart genügt wird, dass

$$(161.)\quad (a_2^{(\varrho)})_{z_1=a} = z_2, \quad (a_3^{(\varrho)})_{z_1=a} = z_3, \quad \ldots, \quad (a_\mu^{(\varrho)})_{z_1=a} = z_\mu$$

wird für $\varrho = 1, 2, \ldots, m$; denn ist dieses der Fall, so sieht man unmittelbar aus den Gleichungen (159.), dass die Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ den durch die Gleichungen (157.) ausgedrückten Bedingungen genügen.

Da aber diese Methode, wenn $m > 1$ ist, nach den oben angestellten Untersuchungen wieder auf die Integration von partiellen Differentialgleichungssystemen und zwar in diesem Falle noch mit den durch die Gleichungen (161.) gegebenen Beschränkungen führt, so kann die Aufgabe, das geforderte Integralsystem aus dem vollständigen *unmittelbar* herzuleiten, nicht als lösbar bezeichnet werden, ausser in dem Falle, der auch schon oben in der Herleitung der Integralsysteme mit m willkürlichen Functionen von je $\mu-1$ Variabelnverbindungen eine Ausnahme bildete, nämlich für $m = 1$, welchen bereits Herr *Adolph Mayer* behandelt hat.*) Setzt man nämlich, da nur die erste der Gleichungen (160.) zu befriedigen ist,

$$(162.)\quad \frac{\partial\omega_1(z_1,\ldots,)}{\partial a_{11}} - \frac{\partial\omega_1(a,\ldots,)}{\partial a_{11}} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial\omega_1(z_1,\ldots,)}{\partial a_{1\mu-1}} - \frac{\partial\omega_1(a,\ldots,)}{\partial a_{1\mu-1}} = 0,$$

$$(163.)\quad \frac{\partial\omega_1(a,\ldots,)}{\partial a_2^{(1)}} - \frac{\partial\varphi_1(a_2^{(1)},\ldots,)}{\partial a_2^{(1)}} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial\omega_1(a,\ldots,)}{\partial a_\mu^{(1)}} - \frac{\partial\varphi_1(a_2^{(1)},\ldots,)}{\partial a_\mu^{(1)}} = 0,$$

---

*) Die *Lie*sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Mathematische Annalen Band VI.

so erhält man aus diesen $2(\mu-1)$ Gleichungen die Werthe der $2(\mu-1)$ Grössen

$$a_{11}, \quad \ldots, \quad a_{1\mu-1}, \quad a_2^{(1)}, \quad \ldots, \quad a_\mu^{(1)},$$

und sieht zugleich aus (162.) unmittelbar, dass die Werthe von $a_2^{(1)}$, $a_3^{(1)}, \ldots, a_\mu^{(1)}$ für $z_1 = a$ in $z_2, z_3, \ldots, z_\mu$ übergehen, wie die Gleichungen (161.) es forderten.

Es mag zu den früher auseinandergesetzten Untersuchungsmethoden noch bemerkt werden, dass man häufig durch eine Variation der Constanten, wie sie dem speciellen Falle angepasst ist, aus dem vollständigen oder auch aus nicht vollständigen Integralsystemen neue Integralsysteme wird herleiten können. Seien z. B. als vollständige Integralsysteme eines Differentialgleichungssystems zweiter Klasse mit zwei unabhängigen Variabeln

$$(164.)\quad \begin{cases} u_1 = a_{11}^2 z_1 + a_{12} z_2 + a_{21}^2 z_1 z_2 + a_{22} z_1^2, \\ u_2 = a_{11} z_2 + a_{12}^2 z_1 + a_{21} z_1 + a_{22}^2 z_2 \end{cases}$$

gegeben, und versucht man eine Variation der Constanten, für welche a_{21} und a_{22} Constanten bleiben, so sind, damit die Integralformen (164.) beibehalten werden, die 4 Differentialgleichungen zu befriedigen:

$$(165.)\quad \begin{cases} 2a_{11} z_1 \dfrac{\partial a_{11}}{\partial z_1} + z_2 \dfrac{\partial a_{12}}{\partial z_1} = 0, \\ z_2 \dfrac{\partial a_{11}}{\partial z_1} + 2a_{12} z_1 \dfrac{\partial a_{12}}{\partial z_1} = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad (166.)\quad \begin{cases} 2a_{11} z_1 \dfrac{\partial a_{11}}{\partial z_2} + z_2 \dfrac{\partial a_{12}}{\partial z_2} = 0, \\ z_2 \dfrac{\partial a_{11}}{\partial z_2} + 2a_{12} z_1 \dfrac{\partial a_{12}}{\partial z_2} = 0. \end{cases}$$

Da aus (165.) sowohl als auch aus (166.) sich die Beziehung

$$(167.)\qquad 4a_{11} a_{12} z_1^2 - z_2^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad a_{12} = \frac{z_2^2}{4a_{11} z_1^2}$$

ergiebt, so sind nur noch die beiden gleichzeitigen partiellen Differentialgleichungen für a_{11} als abhängige und z_1 und z_2 als unabhängige Variabeln zu befriedigen:

$$(168.)\quad \begin{cases} (8z_1^3 a_{11}^3 - z_2^3) \dfrac{\partial a_{11}}{\partial z_1} = \dfrac{2a_{11} z_2^3}{z_1}, \\ (8z_1^3 a_{11}^3 - z_2^3) \dfrac{\partial a_{11}}{\partial z_2} = -2a_{11} z_2^2; \end{cases}$$

multiplicirt man die erste Gleichung mit dz_1, die zweite mit dz_2, so erhält man

$$(169.)\qquad (8z_1^3 a_{11}^3 - z_2^3)\, da_{11} - \frac{2a_{11} z_2^3}{z_1}\, dz_1 + 2a_{11} z_2^2\, dz_2 = 0,$$

und man sieht sogleich, dass für diese Gleichung die Bedingung der Integrabilität

$$2a_{11}z_2^2\left(24z_1^2a_{11}^3+\frac{2z_2^3}{z_1}\right)-\frac{2a_{11}z_2^2}{z_1}(2z_1^2+3z_2^2)+(8z_1^3a_{11}^3-z_2^3)\left(\frac{-6a_{11}z_2^2}{z_1}\right) = 0$$

identisch erfüllt wird; es werden sich somit nach bekannten Regeln a_{11}, also nach (167.) auch a_{12} als Functionen von z_1 und z_2 in der Form bestimmen lassen

$$a_{11} = \psi_1(z_1, z_2, c), \quad a_{12} = \psi_2(z_1, z_2, c),$$

worin c eine willkürliche Constante bedeutet.

Heidelberg im Januar 1891.

Elementare Construction der Figur dreier in desmischer Lage befindlichen Tetraeder.

(Von *H. Schroeter* in Breslau.)

Obgleich die Figur dreier in desmischer Lage befindlichen Tetraeder, welche bei geometrischen Untersuchungen verschiedener Art sich darbietet, schon mehrfach untersucht worden ist*), scheint ihre durchaus elementare Construction und die Herleitung ihres Zusammenhanges doch nicht in der einfachsten und leicht übersehbaren Darstellung gegeben zu sein, welche ein nochmaliges Zurückkommen auf diese interessante Figur im Raume als unnöthig erscheinen liesse, zumal die im Folgenden gegebene Herleitung an eine Auffassung des räumlichen Fünfecks anknüpft, welche analog ist bekannten Eigenschaften des vollständigen ebenen Vierecks und Anlass bietet zu weiteren Untersuchungen der räumlichen Figur, auf welche hier vorläufig nicht eingegangen werden soll. (Siehe die unten angeführte Arbeit von *O. Hermes*.)

1. Nimmt man von fünf Punkten im Raume, von denen keine drei in gerader Linie und keine vier in einer Ebene liegen, vier als die Ecken eines Tetraeders $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ heraus, so lassen sich durch den fünften übrigbleibenden Punkt $\mathfrak{B}_1$ drei solche Strahlen ziehen, die jedem der drei Paare

*) *C. Stephanos:* Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres (Bulletin des sciences mathématiques, Paris 1879, 2. Série, Tome III.). *L. Cremona:* Teoremi stereometrici, dai quali si deducono le proprietà dell' esagrammo di Pascal (R. Accad. dei Lincei 1877). *H. Schroeter:* Einige Sätze über das Tetraeder (Tageblatt der Naturforscher-Vers. zu Baden-Baden 1879). *H. Schroeter:* Ueber eine Raumcurve vierter Ordnung und erster Species (dieses Journal Bd. 93 S. 169. 1882). *O. Hermes:* Das Fünfflach und Fünfeck im Raume etc. (ebenda Bd. 56 S. 247, 1859). *O. Schlömilch:* Zeitschrift für Mathematik und Physik Jahrg. 27 (1882) „Kleinere Mittheilungen" Art. XXIV u. XXV und Bemerkung von *H. Schroeter* S. 380. *L. Klug:* Ueber mehrfach perspective Tetraeder (*Hoppes* Archiv für Mathematik u. Physik 2te Reihe, Bd. 6 S. 93, 1887). *E. Hess:* Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder (Math. Annalen Bd. 28, S. 167, 1886).

Gegenkanten des Tetraeders begegnen, und zu diesen sechs Punkten auf den Tetraederkanten lassen sich die zugeordneten vierten harmonischen Punkte rücksichtlich des Paares von Tetraederecken ermitteln; wir erhalten hierdurch auf den Tetraederkanten 12 Punkte, die wir so bezeichnen:

$$\begin{aligned}
&([\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2],\ |\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4|) = \mathfrak{a}_1, && (\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3) = -1,\\
&([\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4],\ |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2|) = \mathfrak{a}_2, && (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4) = -1,\\
&([\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3],\ |\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4|) = \mathfrak{b}_1, && (\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3) = -1,\\
&([\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4],\ |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3|) = \mathfrak{b}_2, && (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4) = -1,\\
&([\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3],\ |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4|) = \mathfrak{c}_1, && (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3) = -1,\\
&([\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4],\ |\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3|) = \mathfrak{c}_2, && (\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4) = -1.
\end{aligned}$$

Die hierdurch erhaltenen zwölf Punkte:

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4,$$

welche paarweise auf den sechs Kanten des Tetraeders $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ liegen, stehen in mehrfachem eigenthümlichen Zusammenhange unter einander, den wir in folgender Weise leicht erkennen:

Trifft nämlich der Verbindungsstrahl $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_4|$ die Ebene $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3]$ in einem Punkte $\mathfrak{S}$, so sind die Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{S}\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3) = \mathfrak{c}_2, \quad (\mathfrak{S}\mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1) = \mathfrak{b}_2, \quad (\mathfrak{S}\mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2) = \mathfrak{a}_2,$$

und die ihnen zugeordneten vierten harmonischen Punkte rücksichtlich jedes Tetraederecken-Paares:

$$\mathfrak{c}_4 \quad \mathfrak{b}_4 \quad \mathfrak{a}_4;$$

solche sechs Punkte in der Ebene $[\mathfrak{S}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3]$ liegen bekanntlich zu je dreien auf vier Geraden, den Seiten eines vollständigen Vierseits, nämlich:

$$|\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4| \quad |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4|;$$

in gleicher Weise finden wir die vier Geraden:

$$|\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1| \quad |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1| \quad |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3|;$$

ferner ebenso:

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3| \quad |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3|,$$

und endlich:

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4| \quad |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2| \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4|.$$

Wir erhalten hierdurch 16 Gerade, auf welchen die 12 Punkte $\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_i\mathfrak{c}_i$ ($i = 1$, 2, 3, 4) zu je dreien auf folgende Weise liegen:

$$(\text{I.}) \qquad \left\{\begin{array}{llll}
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1|\\
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2|\\
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3|\\
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2| & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3| & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4|.
\end{array}\right.$$

Aus dieser Lagenbeziehung der 12 Punkte $\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_i\mathfrak{c}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ geht hervor, dass *die drei Tetraeder, deren Ecken:*

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$$

sind, sich in desmischer Lage befinden; d. h. *je zwei derselben liegen auf vierfache Weise perspectiv, und die vier Perspectivitäts-Centra sind die Ecken des dritten Tetraeders.*

Wir erkennen dies am anschaulichsten, wenn wir die Ecken zweier Tetraeder unter einander stellen, deren Verbindungsstrahlen durch einen Punkt laufen und dieses Perspectivitäts-Centrum darunter setzen, also so schreiben:

$$(\mathrm{I}_a.) \quad \left\{ \begin{array}{cccc}
\dfrac{\substack{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 \\ \mathfrak{c}_4\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_1}}{\mathfrak{a}_1} & \dfrac{\substack{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 \\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2}}{\mathfrak{a}_2} & \dfrac{\substack{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 \\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\mathfrak{c}_3}}{\mathfrak{a}_3} & \dfrac{\substack{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4 \\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4}}{\mathfrak{a}_4} \\
\dfrac{\substack{\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4 \\ \mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1}}{\mathfrak{b}_1} & \dfrac{\substack{\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4 \\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2}}{\mathfrak{b}_2} & \dfrac{\substack{\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4 \\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_3}}{\mathfrak{b}_3} & \dfrac{\substack{\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4 \\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4}}{\mathfrak{b}_4} \\
\dfrac{\substack{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 \\ \mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_1}}{\mathfrak{c}_1} & \dfrac{\substack{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 \\ \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2}}{\mathfrak{c}_2} & \dfrac{\substack{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 \\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{b}_3}}{\mathfrak{c}_3} & \dfrac{\substack{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4 \\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4}}{\mathfrak{c}_4} .
\end{array} \right.$$

2. Umgekehrt lassen sich die vier Ecken des ursprünglichen Tetraeders $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ ausdrücken als die Schnittpunkte gewisser Kanten der drei in desmischer Lage befindlichen Tetraeder $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$, nämlich:

$$(\mathrm{a.}) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\mathfrak{A}_1 = (\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4, \ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4, \ \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3), \\
\mathfrak{A}_2 = (\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4, \ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3, \ \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4), \\
\mathfrak{A}_3 = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3, \ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4, \ \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4), \\
\mathfrak{A}_4 = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3, \ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3, \ \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3),
\end{array} \right.$$

und auch $\mathfrak{B}_1$ erscheint als der Schnittpunkt der drei Strahlen $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|$, $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2|$, $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2|$. Ebenso lassen sich noch weitere je drei Kanten der drei desmischen Tetraeder zusammenstellen, die durch einen neuen Punkt laufen. Da sich nämlich nach (I.) die beiden Geraden $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2|$ und $|\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2|$ in dem Punkte $\mathfrak{c}_2$ schneiden, so liegen die vier Punkte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4$ in einer Ebene; aus gleichem Grunde liegen auch $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$ in einer Ebene und auch $\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$ in einer Ebene. Diese drei Ebenen sind aber verschieden von einander und schneiden sich daher in einem Punkte, durch welchen die drei Schnittlinien je zweier derselben hindurchgehen müssen, also schneiden sich die drei Geraden

$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|$, $|\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4|$, $|\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4|$ in einem Punkte, den wir $\mathfrak{B}_2$ nennen wollen; in gleicher Weise erhalten wir noch zwei weitere Punkte $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$, also im Ganzen als Schnittpunkte je dreier Geraden:

$$(\mathfrak{b}.)\quad \begin{cases} \mathfrak{B}_1 = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2), \\ \mathfrak{B}_2 = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4,\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4), \\ \mathfrak{B}_3 = (\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4), \\ \mathfrak{B}_4 = (\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2). \end{cases}$$

Wir sehen aber auch weiter, weil sich die beiden Geraden $|\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4|$ und $|\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4|$ in dem Punkte $\mathfrak{c}_4$ schneiden, dass die vier Punkte $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3$ in einer Ebene liegen müssen; aus gleichem Grunde liegen auch $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3$ in einer Ebene und auch $\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3$ in einer Ebene. Diese drei Ebenen sind aber verschieden von einander und schneiden sich daher in einem Punkte, durch welchen die drei Schnittlinien je zweier derselben hindurchgehen müssen, also schneiden sich die drei Geraden $|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3|$, $|\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3|$, $|\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3|$ in einem Punkte, den wir $\mathfrak{C}_1$ nennen wollen; in gleicher Weise erhalten wir noch weitere drei Punkte, die wir in folgender Weise bezeichnen:

$$(\mathfrak{c}.)\quad \begin{cases} \mathfrak{C}_1 = (\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3,\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3), \\ \mathfrak{C}_2 = (\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4), \\ \mathfrak{C}_3 = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4), \\ \mathfrak{C}_4 = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4,\ \mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3). \end{cases}$$

Wir haben durch die Tabellen (b.) und (c.) zu den ursprünglich angenommenen fünf Punkten $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_1$ sieben neue Punkte gefunden, also im Ganzen 12 Punkte, die sich zu drei Tetraedern als Ecken zusammensetzen lassen:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4,\quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4,\quad \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4,$$

und diese drei Tetraeder befinden sich wiederum *in desmischer Lage,* wie wir in folgender Weise erkennen:

Betrachten wir nämlich die beiden Ebenen:

$$[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4],$$

so liegen auf ihrer Schnittlinie die Schnittpunkte der drei Ebenen:

$$[\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4],\quad [\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2],\quad [\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4]$$

mit ihr; diese sind aber:

$$\mathfrak{A}_1, \qquad \mathfrak{B}_1, \qquad \mathfrak{C}_4.$$

Auf diese Weise finden wir folgende 16 Geraden, deren jede drei Punkte enthält, nämlich:

$$(\text{II.})\quad \left\{\begin{array}{llll} |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_4| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2| & |\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1| \\ |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_4| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1| & |\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2| \\ |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_4| & |\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3| \\ |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_1| & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_2| & |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_3| & |\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_4|, \end{array}\right.$$

und sehen hieraus, dass die drei neuen Tetraeder:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4,\quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4,\quad \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4$$

sich in desmischer Lage befinden, indem je zwei derselben in vierfacher Weise perspectiv liegen und die vier Perspectivitätscentra allemal die Ecken des dritten Tetraeders sind, was wir in der früher angegebenen Weise so schreiben können:

$$(\text{IIa.})\quad \left\{\begin{array}{cccc} \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4 & \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4 & \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4 & \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4 \\ \underline{\mathfrak{C}_4\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_1} & \underline{\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2} & \underline{\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4\mathfrak{C}_3} & \underline{\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4} \\ \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4 & \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4 & \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4 & \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4 \\ \underline{\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1} & \underline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2} & \underline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_3} & \underline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4} \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{B}_3 & \mathfrak{B}_4 \\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 & \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 & \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 & \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 \\ \underline{\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1} & \underline{\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2} & \underline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_3} & \underline{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4} \\ \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{C}_2 & \mathfrak{C}_3 & \mathfrak{C}_4 \end{array}\right..$$

3. Wir sehen nun aus den Tabellen (a.), (b.), (c.) in 2. auch umgekehrt, wie sich die Ecken der drei Tetraeder:

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4,\quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4,\quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$$

ausdrücken lassen als die Schnittpunkte gewisser Kanten der drei neuen in desmischer Lage befindlichen Tetraeder:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4,\quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4,\quad \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4,$$

nämlich:

$$(\text{A.})\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{a}_1 = (\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4,\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2,\ \mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4), \\ \mathfrak{a}_2 = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2,\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2), \\ \mathfrak{a}_3 = (\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4,\ \mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4,\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2), \\ \mathfrak{a}_4 = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4,\ \mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4), \end{array}\right.$$

ferner:

$$(\text{B.})\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{b}_1 = (\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4,\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3,\ \mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4), \\ \mathfrak{b}_2 = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3,\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3), \\ \mathfrak{b}_3 = (\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4,\ \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4,\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3), \\ \mathfrak{b}_4 = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4,\ \mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4) \end{array}\right.$$

und endlich:

$$(\mathrm{C.})\quad \begin{cases} \mathfrak{c}_1 = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4,\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4,\ \mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3), \\ \mathfrak{c}_2 = (\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4,\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4), \\ \mathfrak{c}_3 = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4,\ \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3,\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4), \\ \mathfrak{c}_4 = (\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3,\ \mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3). \end{cases}$$

Aus diesen drei Tabellen (A.), (B.), (C.) ergeben sich ebenso wie aus den früheren (a.), (b.), (c.) die Identitäten zwischen den Tetraederkanten aus den beiden Gruppen von je drei in desmischer Lage befindlichen Tetraedern, zu denen wir gelangt sind: $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4$, nämlich:

$$\begin{array}{lll}
|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2| \equiv |\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3| \equiv |\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4| & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4| \equiv |\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4|, \\
|\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4| \equiv |\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4| \equiv |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2| & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3| \equiv |\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2|, \\
|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2| \equiv |\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3| \equiv |\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4| & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4| \equiv |\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4|, \\
|\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4| \equiv |\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4| \equiv |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3| & |\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3| \equiv |\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3|, \\
|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2| \equiv |\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3| \equiv |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4| & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4| \equiv |\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3|, \\
|\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4| \equiv |\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4| \equiv |\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3| & |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3| \equiv |\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4|.
\end{array}$$

Ebenso wie wir oben (in 1.) gesehen haben, dass bei dem ursprünglichen Tetraeder $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ auf jeder der sechs Kanten das Paar Tetraeder-Ecken harmonisch getrennt wird durch die Schnittpunkte mit einem Paar Gegenkanten aus den drei in desmischer Lage befindlichen Tetraedern:

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4,$$

so dass also die Doppelverhältnisse den harmonischen Werth -1 besitzen:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4) &= -1, \\
(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3) &= -1, \\
(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4) &= -1, \\
(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3) &= -1, \\
(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4) &= -1, \\
(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\,\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3) &= -1,
\end{aligned}$$

zeigt sich nun auch ein gleiches Verhalten bei den beiden andern Tetraedern:

$$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4 \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4;$$

da nämlich (nach Tabelle (A.)) die vier Punkte:

$$\mathfrak{a}_1, \quad \mathfrak{a}_2, \quad \mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{B}_2$$

auf einer Geraden liegen und ebenso die vier Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$, letztere noch dazu harmonisch sind, da ferner beide Geraden den Punkt $\mathfrak{a}_1$ gemeinschaftlich haben und die drei Verbindungsstrahlen:

$$|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3|, \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_3|, \quad |\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_4|$$

sich in einem und demselben Punkte $\mathfrak{C}_2$ schneiden, so sind auch die vier Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ harmonisch gelegen, also das Doppelverhältniss:

$$(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) = -1.$$

In dieser Weise finden wir die folgenden harmonischen Beziehungen:

$$(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) = -1,$$
$$(\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4) = -1,$$
$$(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) = -1,$$
$$(\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4) = -1,$$
$$(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2) = -1,$$
$$(\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4) = -1$$

und auf den sechs Kanten des dritten Tetraeders:

$$(\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3) = -1,$$
$$(\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4) = -1,$$
$$(\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3) = -1,$$
$$(\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4) = -1,$$
$$(\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3) = -1,$$
$$(\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4) = -1.$$

Aus diesen drei letzteren harmonischen Beziehungen ergiebt sich nun eine zweite ebenso einfache Construction, um von den ursprünglich angenommenen fünf Punkten im Raume, die in die Tetraederecken $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ und den einzeln stehenden fünften Punkt $\mathfrak{B}_1$ getheilt waren, zu den drei Punkten $\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ direct zu gelangen:

Man ziehe nämlich durch $\mathfrak{B}_1$ diejenige Gerade, welche dem Gegenkantenpaar $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2|$ und $|\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4|$ in $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_1$ begegnet, und bestimme den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{B}_2$ so, dass:

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2) = -1$$

ist; ebenso ziehe man durch $\mathfrak{B}_1$ diejenige Gerade, welche dem Gegenkantenpaar $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3|$ und $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4|$ in $\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{b}_1$ begegnet, und bestimme den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{B}_3$ so, dass:

$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3) = -1$$

ist; endlich ziehe man durch $\mathfrak{B}_1$ diejenige Gerade, welche dem Gegenkantenpaar $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4|$ und $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3|$ in $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ begegnet, und bestimme den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{B}_4$ so, dass:

$$(\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4) = -1$$

ist; alsdann erhält man das zweite Tetraeder:

$$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4,$$

welches mit dem ersten gegebenen $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ auf vierfache Weise perspective Lage hat, und die vier Perspectivitäts-Centra sind die Ecken eines dritten Tetraeders $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4$ (Tab. IIa.), welches in Verbindung mit den beiden ersten die desmische Lage der drei Tetraeder darstellt.

Wir bemerken noch, was selbstverständlich ist, dass man bei den drei in desmischer Lage befindlichen Tetraedern von den vier Ecken eines jeden derselben und einer Ecke eines zweiten als fünftem Punkte ausgehen kann und durch die gleiche Construction die Vervollständigung der ganzen Figur erlangt.

4. Wir haben bisher in den beiden Gruppen von je drei in desmischer Lage befindlichen Tetraedern:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4, \quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4, \quad \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4,$$

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4,$$

zu denen wir gelangt sind, nicht allein den Zusammenhang ermittelt, in welchem bei jeder einzelnen Gruppe die Ecken und Kanten der drei Tetraeder mit einander stehen, sondern auch die Identität nachgewiesen zwischen den Tetraederkanten der einen und der anderen Gruppe und die harmonische Lage der auf diesen gemeinsamen Tetraederkanten befindlichen Paare von Tetraederecken aus den beiden verschiedenen Gruppen. Wir gehen jetzt dazu über, die Seitenflächen der beiden Tetraedergruppen einzuführen und ihren Zusammenhang aufzusuchen, der sich zu einer ähnlichen Beziehung gestaltet.

Wir bezeichnen in jedem der sechs Tetraeder die einer Ecke gegenüberliegende Seitenfläche durch den analogen (mit gleichem Index versehenen) griechischen Buchstaben, nämlich:

$$\alpha_1 = [\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4], \quad \beta_1 = [\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4], \quad \gamma_1 = [\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4],$$
$$\alpha_2 = [\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4], \quad \beta_2 = [\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4], \quad \gamma_2 = [\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4],$$
$$\alpha_3 = [\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4], \quad \beta_3 = [\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4], \quad \gamma_3 = [\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4],$$
$$\alpha_4 = [\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3], \quad \beta_4 = [\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3], \quad \gamma_4 = [\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3];$$

$$A_1 = [\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4], \quad B_1 = [\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4], \quad \Gamma_1 = [\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4],$$
$$A_2 = [\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4], \quad B_2 = [\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4], \quad \Gamma_2 = [\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4],$$
$$A_3 = [\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4], \quad B_3 = [\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4], \quad \Gamma_3 = [\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4],$$
$$A_4 = [\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3], \quad B_4 = [\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3], \quad \Gamma_4 = [\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3].$$

Zwischen diesen 24 Ebenen besteht ein analoger Zusammenhang wie zwischen den 24 Ecken der sechs Tetraeder. Wir sehen nämlich aus der Tabelle (II.) in 2., dass die vier Geraden:

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2|, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_1|, \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1|, \quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_2|$$

sich als die vier Seiten eines vollständigen ebenen Vierseits auffassen lassen, von dem die drei Paare Gegenecken sind:

$$\mathfrak{A}_1 \text{ und } \mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{B}_3 \text{ und } \mathfrak{B}_4, \quad \mathfrak{C}_1 \text{ und } \mathfrak{C}_2;$$

die drei Diagonalen des Vierseits:

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2|, \quad |\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4|, \quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2|$$

schneiden sich in den drei Diagonalpunkten, und diese sind nach Tab. (A.) die Punkte $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ und liegen in der Ebene α_1; wir haben also in dieser Ebene 9 Punkte: die drei Paare Gegenecken und die drei Diagonalpunkte eines vollständigen Vierseits, dessen Seiten den 16 Geraden der Tab. (II.) angehören. Solcher vollständigen Vierseite können wir auf diese Weise 12 zusammenstellen, nämlich:

Vollständige ebene Vierseite

mit den drei	*Paaren*	*Gegenecken:*	*den Diagonalpunkten:*	*in der Ebene:*
$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$,	$\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$,	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$,	$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$,	α_1,
$\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$,	$\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$,	$\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4$,	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$,	α_2,
$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$,	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$,	$\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4$.	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4$,	α_3,
$\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$,	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$,	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$,	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$,	α_4,
$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3$,	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4$,	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3$,	$\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4$,	β_1,
$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4$,	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4$,	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4$,	$\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4$,	β_2,
$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3$,	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3$,	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4$,	$\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4$,	β_3,
$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4$,	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3$,	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3$,	$\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3$,	β_4,
$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$,	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$,	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4$,	$\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$,	γ_1,
$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4$,	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$,	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3$,	$\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$,	γ_2,
$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$,	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4$,	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3$,	$\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4$,	γ_3,
$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4$,	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4$,	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4$.	$\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3$,	γ_4.

Hiernach erscheinen also in jeder Seitenfläche eines der in desmischer Lage befindlichen Tetraeder:

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$$

die drei in ihr enthaltenen Kanten als die drei Diagonalen eines vollständigen ebenen Vierseits, dessen drei Paar Gegenecken gewisse sechs Ecken der anderen Gruppe der drei in desmischer Lage befindlichen Tetraeder:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4, \quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4, \quad \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4$$

sind. Wir sehen hieraus, da die Ebene α_1 die drei Punkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{C}_1$ enthält, welche in einer Geraden liegen (nach (II.)), da auch die Ebene β_1 dieselben drei Punkte enthält, und endlich auch die Ebene γ_4, dass nothwendig die drei Ebenen:

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_4$$

sich in einer und derselben Geraden schneiden müssen, welche mit der Geraden $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_1|$ identisch ist.

So zeigt sich, dass die 12 Ebenen:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \quad \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4, \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$$

sich zu je dreien in 16 Geraden schneiden, nämlich:

$$\text{(III.)} \qquad \begin{cases} |\alpha_1\beta_1\gamma_4|, & |\alpha_2\beta_1\gamma_3|, & |\alpha_3\beta_1\gamma_2|, & |\alpha_4\beta_1\gamma_1|, \\ |\alpha_1\beta_2\gamma_3|, & |\alpha_2\beta_2\gamma_4|, & |\alpha_3\beta_2\gamma_1|, & |\alpha_4\beta_2\gamma_2|, \\ |\alpha_1\beta_3\gamma_2|, & |\alpha_2\beta_3\gamma_1|, & |\alpha_3\beta_3\gamma_4|, & |\alpha_4\beta_3\gamma_3|, \\ |\alpha_1\beta_4\gamma_1|, & |\alpha_2\beta_4\gamma_2|, & |\alpha_3\beta_4\gamma_3|, & |\alpha_4\beta_4\gamma_4|, \end{cases}$$

und dass diese 16 Geraden mit den 16 Geraden der Tab. (II.) identisch sind, aber in gewisser anderer Anordnung.

Wir schliessen hieraus, dass die 12 Seitenflächen dreier in desmischer Lage befindlichen Tetraeder eine dualistisch gegenüberstehende Eigenschaft aufweisen, wie die 12 Ecken derselben; nämlich *perspective* Lage zweier Tetraeder nennt man bekanntlich eine solche, dass die vier Ecken des einen in gewisser Weise mit den vier Ecken des andern verbunden, vier Strahlen liefern, die durch einen Punkt (Perspectivitäts-Centrum) laufen. Nennen wir nun *complanare* Lage zweier Tetraeder*) eine solche, dass die vier Seitenflächen des einen in gewisser Weise von den vier Seitenflächen des

*) *Hess,* a. a. O. S. 212. — Perspective Tetraeder sind bekanntlich immer complanar.

andern in vier Geraden durchschnitten werden, die in einer Ebene liegen, so lässt sich Folgendes aus der Tabelle (III.) ablesen:

Wenn man von drei in desmischer Lage befindlichen Tetraedern irgend zwei herausnimmt, so erkennt man, dass dieselben in vierfacher Weise complanar sind, und dass die vier Ebenen, welche diese Lage liefert, die vier Seitenflächen des dritten Tetraeders sind.

Hierzu tritt nun noch der eigenthümliche Umstand, dass bei Auffassung der complanaren Lage der desmischen Tetraeder:

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$$

dieselben 16 Geraden als Durchschnittslinien von Seitenflächen auftreten, wie bei perspectiver Lage der drei andern Tetraeder:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4, \quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4, \quad \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4$$

die Verbindungsstrahlen von Tetraeder-Ecken, welche nach den Perspectivitätscentren laufen. Diese Identität wollen wir noch nachträglich beifügen:

$$\begin{array}{ll}
|\alpha_1\beta_1\gamma_4| \equiv |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_1|, & |\alpha_2\beta_1\gamma_3| \equiv |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_3|, \\
|\alpha_1\beta_2\gamma_3| \equiv |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_2|, & |\alpha_2\beta_2\gamma_4| \equiv |\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4\mathfrak{C}_4|, \\
|\alpha_1\beta_3\gamma_2| \equiv |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2|, & |\alpha_2\beta_3\gamma_1| \equiv |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_4|, \\
|\alpha_1\beta_4\gamma_1| \equiv |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_1|, & |\alpha_2\beta_4\gamma_2| \equiv |\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3|, \\
|\alpha_3\beta_1\gamma_2| \equiv |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_3|, & |\alpha_4\beta_1\gamma_1| \equiv |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1|, \\
|\alpha_3\beta_2\gamma_1| \equiv |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_4|, & |\alpha_4\beta_2\gamma_2| \equiv |\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2|, \\
|\alpha_3\beta_3\gamma_4| \equiv |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_4|, & |\alpha_4\beta_3\gamma_3| \equiv |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2|, \\
|\alpha_3\beta_4\gamma_3| \equiv |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3|, & |\alpha_4\beta_4\gamma_4| \equiv |\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|.
\end{array}$$

5. Wir können nun andererseits in gleicher Weise, wie wir in (4.) von den 12 Ecken der drei in desmischer Lage befindlichen Tetraeder:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4, \quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4, \quad \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4$$

ausgegangen sind, die andere Gruppe der drei in desmischer Lage befindlichen Tetraeder:

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$$

zum Ausgangspunkt wählen und erkennen aus der Tabelle (I.) in 1., dass die vier Geraden:

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4|, \quad |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2|, \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2|, \quad |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4|$$

sich als die vier Seiten eines vollständigen ebenen Vierseits auffassen lassen, von dem die drei Paare Gegenecken:

$$\mathfrak{a}_1 \text{ und } \mathfrak{a}_3, \quad \mathfrak{b}_1 \text{ und } \mathfrak{b}_3, \quad \mathfrak{c}_2 \text{ und } \mathfrak{c}_4,$$

die Diagonalen:

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3|, \quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3|, \quad |\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4|$$

und die Diagonalpunkte nach Tabelle (a.):

$$\mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{A}_3, \quad \mathfrak{A}_4$$

sind, dessen Ebene A_1 ist. Wir haben also in dieser Ebene neun Punkte: die drei Paare Gegenecken und die drei Diagonalpunkte eines vollständigen Vierseits, dessen vier Seiten den 16 Geraden der Tabelle (I.) angehören. Solcher vollständigen Vierseite können wir in der angegebenen Weise 12 zusammenstellen, nämlich:

Vollständige ebene Vierseite

mit den drei Paaren Gegenecken:			*den Diagonalpunkten:*	*in der Ebene:*
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$,	$\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3$,	$\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4$,	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$,	A_1,
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$,	$\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4$,	$\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3$,	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$,	A_2,
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4$,	$\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3$,	$\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3$,	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4$,	A_3,
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4$,	$\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_4$,	$\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_4$,	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$,	A_4;
$\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$,	$\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4$,	$\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$,	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$,	B_1,
$\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$,	$\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$,	$\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$,	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$,	B_2,
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$,	$\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4$,	$\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$,	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4$,	B_3,
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$,	$\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$,	$\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$,	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$,	B_4,
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4$,	$\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4$,	$\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4$,	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4$,	Γ_1,
$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4$,	$\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3$,	$\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3$,	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4$,	Γ_2,
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$,	$\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4$,	$\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3$,	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4$,	Γ_3,
$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$,	$\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3$,	$\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4$,	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3$,	Γ_4.

Hiernach erscheinen in jeder Seitenfläche eines der drei in desmischer Lage befindlichen Tetraeder:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4, \quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4, \quad \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4$$

die drei in ihr enthaltenen Kanten als die drei Diagonalen eines vollständigen ebenen Vierseits, dessen drei Paare Gegenecken gewisse sechs Ecken der andern Gruppe von drei in desmischer Lage befindlichen Tetraedern:

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$$

sind. Wir sehen hieraus, da die Ebene A_1 die Punkte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4$ enthält, welche in einer Geraden liegen nach Tabelle (I.), und da auch die Ebene B_4 und die Ebene Γ_1 dieselben drei Punkte enthält, dass nothwendig die drei Ebenen:

$$A_1, \quad B_4, \quad \Gamma_1$$

sich in einer und derselben Geraden schneiden müssen, welche mit der Geraden $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4|$ identisch ist.

In solcher Weise erhalten wir 16 Gerade, in welchen sich die 12 Ebenen:

$$A_1A_2A_3A_4, \quad B_1B_2B_3B_4, \quad \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4$$

zu je dreien durchschneiden, nämlich:

$$\text{(IV.)} \quad \begin{cases} |A_1B_1\Gamma_4|, & |A_2B_1\Gamma_3|, & |A_3B_1\Gamma_2|, & |A_4B_1\Gamma_1|, \\ |A_1B_2\Gamma_3|, & |A_2B_2\Gamma_4|, & |A_3B_2\Gamma_1|, & |A_4B_2\Gamma_2|, \\ |A_1B_3\Gamma_2|, & |A_2B_3\Gamma_1|, & |A_3B_3\Gamma_4|, & |A_4B_3\Gamma_3|, \\ |A_1B_4\Gamma_1|, & |A_2B_4\Gamma_2|, & |A_3B_4\Gamma_3|, & |A_4B_4\Gamma_4|, \end{cases}$$

und diese 16 Geraden sind identisch mit denjenigen der Tabelle (I.), aber in gewisser anderer Anordnung, nämlich:

$$\begin{array}{ll} |A_1B_1\Gamma_4| \equiv |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4|, & |A_2B_1\Gamma_3| \equiv |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3|, \\ |A_1B_2\Gamma_3| \equiv |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2|, & |A_2B_2\Gamma_4| \equiv |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1|, \\ |A_1B_3\Gamma_2| \equiv |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2|, & |A_2B_3\Gamma_1| \equiv |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1|, \\ |A_1B_4\Gamma_1| \equiv |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4|, & |A_2B_4\Gamma_2| \equiv |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3|, \\ |A_3B_1\Gamma_2| \equiv |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3|, & |A_4B_1\Gamma_1| \equiv |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4|, \\ |A_3B_2\Gamma_1| \equiv |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1|, & |A_4B_2\Gamma_2| \equiv |\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2|, \\ |A_3B_3\Gamma_4| \equiv |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1|, & |A_4B_3\Gamma_3| \equiv |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2|, \\ |A_3B_4\Gamma_3| \equiv |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3|, & |A_4B_4\Gamma_4| \equiv |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4|. \end{array}$$

Ebenso sind von den drei in desmischer Lage befindlichen Tetraedern:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4, \quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4, \quad \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4$$

je zwei complanar, und zwar auf vierfache Weise, und die Ebenen, zu welchen diese Lage führt, bilden die Seitenflächen des dritten Tetraeders. Dabei sind die 16 Geraden, welche als Durchschnittslinien von Seitenflächen der Tetraeder auftreten, identisch mit den 16 Geraden, welche als Verbindungsstrahlen von Tetraederecken der andern Gruppe desmischer Tetraeder:

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4$$

auftreten (Tabelle I.).

6. Aus der gleichzeitigen perspectiven und complanaren Lage ergeben sich nun auch zwei weitere Constructionen von Tetraedern in desmischer Lage, die anstatt von fünf Punkten im Raume, wie anfangs (1.), von fünf Ebenen im Raume ihren Ausgang nehmen.

Gehen wir nämlich von dem Tetraeder $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ aus, dessen Seitenflächen $A_1A_2A_3A_4$ sind, so lassen sich die Kanten desselben in doppelter Weise ausdrücken:

$$|A_1A_2| \equiv |\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4|, \quad |A_1A_3| \equiv |\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4|, \quad |A_1A_4| \equiv |\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3|,$$
$$|A_3A_4| \equiv |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2|, \quad |A_2A_4| \equiv |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3|, \quad |A_2A_3| \equiv |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4|.$$

Die Ebene $B_1 = [\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4]$ schneidet aber die Tetraederkante $|\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4|$ im Punkte $\mathfrak{a}_3$ und die Gegenkante $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2|$ in $\mathfrak{a}_4$ (nach Tab. (A.)), folglich ist $|\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4|$ die Verbindungslinie der beiden Punkte, in welchen die Ebene B_1 den beiden Tetraederkanten $|A_1A_2|$ und $|A_3A_4|$ begegnet. Wir können nun durch diese Gerade $|\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4|$ die Ebene durchlegen $[\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2]$, welche nach der Tabelle auf Seite 349 nichts anderes ist als α_1, sodann die Ebene $[\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4]$, welche identisch ist mit α_2, und drittens die Ebene B_1; dann ist die vierte harmonische, zu B_1 zugeordnete Ebene dieses Büschels B_2, weil nach der Tabelle auf Seite 352 auch B_2 durch $\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ geht und die vier Ebenen:

$$\alpha_1\alpha_2B_1B_2$$

bez. durch die vier Punkte:

$$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1$$

laufen, welche auf einer Geraden harmonisch gelegen sind (S. 347); folglich müssen auch die vier Ebenen harmonisch liegen, so dass $(\alpha_1\alpha_2B_1B_2) = -1$ ist. Hieraus folgt die einfache Construction von B_2 aus den fünf gegebenen Ebenen $A_1A_2A_3A_4B_1$, und in gleicher Weise erhalten wir die Ebenen B_3 und B_4 aus den harmonischen Beziehungen:

$$(\beta_1\beta_2B_1B_3) = -1, \quad (\gamma_1\gamma_2B_1B_4) = -1.$$

Die Construction einer Gruppe desmischer Tetraeder lässt sich nun in folgender Weise angeben:

Nimmt man im Raume fünf beliebige Ebenen an, von denen keine drei sich in derselben Geraden schneiden, keine vier durch denselben Punkt gehen, und wählt beliebige vier dieser Ebenen zu den Seitenflächen eines Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$, so schneidet die fünfte Ebene B_1 jedes Paar Gegen-

kanten des Tetraeders in einem Punktepaar, nämlich:

$$\left.\begin{array}{lll} |A_1A_2| & \text{in} & \mathfrak{a}_3 \\ |A_3A_4| & \text{in} & \mathfrak{a}_4 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{lll} |A_1A_3| & \text{in} & \mathfrak{b}_3 \\ |A_2A_4| & \text{in} & \mathfrak{b}_4 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{lll} |A_1A_4| & \text{in} & \mathfrak{c}_4 \\ |A_2A_3| & \text{in} & \mathfrak{c}_3 \end{array}\right\}.$$

Legt man nun durch jede der drei in der Ebene B_1 enthaltenen Geraden $|\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4|$, $|\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4|$, $|\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4|$ das Ebenenpaar, welches die beiden Gegenkanten des Tetraeders enthält, die dieser Geraden begegnen:

$$\begin{array}{llll} \text{durch} & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4| & \text{die Ebenen} & \alpha_2,\ \alpha_1, \\ \text{-} & |\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4| & \text{-}\quad\text{-} & \beta_2,\ \beta_1, \\ \text{-} & |\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4| & \text{-}\quad\text{-} & \gamma_2,\ \gamma_1 \end{array}$$

und construirt die zu B_1 zugeordnete vierte harmonische Ebene, so dass:

$$(\alpha_1\alpha_2B_1B_2) = -1,$$
$$(\beta_1\beta_2B_1B_3) = -1,$$
$$(\gamma_1\gamma_2B_1B_4) = -1$$

wird, dann erhält man drei neue Ebenen $B_2B_3B_4$, welche mit B_1 zusammen die vier Seitenflächen eines zweiten Tetraeders $B_1B_2B_3B_4$ bilden; diese beiden Tetraeder haben auf vierfache Weise complanare Lage, d. h. die vier Schnittlinien entsprechender Ebenen liegen selbst in einer neuen Ebene:

$$\frac{\begin{array}{c}A_1A_2A_3A_4\\B_1B_2B_3B_4\end{array}}{\Gamma_4},\quad \frac{\begin{array}{c}A_1A_2A_3A_4\\B_2B_1B_4B_3\end{array}}{\Gamma_3},\quad \frac{\begin{array}{c}A_1A_2A_3A_4\\B_3B_4B_1B_2\end{array}}{\Gamma_2},\quad \frac{\begin{array}{c}A_1A_2A_3A_4\\B_4B_3B_2B_1\end{array}}{\Gamma_1},$$

und $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4$ erscheinen als die vier Seitenflächen des dritten Tetraeders, welches mit den beiden ersten eine Gruppe von drei Tetraedern in desmischer Lage liefert, die gleichzeitig beide Eigenschaften der vierfachen complanaren und perspectiven Lage je zweier derselben in sich vereinigt. Diese Construction steht der in 3. gegebenen dualistisch gegenüber. Zur Vervollständigung der gefundenen harmonischen Beziehungen der Seitenflächen der in Betracht kommenden Tetraeder zu einander bemerken wir noch Folgendes:

Da die vier Punkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4$ auf einer Geraden liegen, da ferner $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2| \equiv |A_3A_4|$ und $|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4| \equiv |\alpha_1\alpha_3|$ ist, so gehen auch die vier Ebenen

$A_3 A_4 \alpha_1 \alpha_3$ durch eine und dieselbe Gerade und bilden ein Ebenenbüschel von vier Ebenen, die einander harmonisch trennen, weil sie bez. durch die vier Punkte $\mathfrak{A}_4 \mathfrak{A}_3 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_1$ gehen, die selbst auf einer Geraden liegen und einander harmonisch trennen; also erhalten wir:

$$(A_3 A_4 \alpha_1 \alpha_3) = -1.$$

In gleicher Weise gelangen wir zu den übrigen harmonischen Beziehungen zwischen je vier Ebenen und haben:

$$\begin{array}{lll}
(A_1 A_2 \alpha_2 \alpha_4) = -1, & (B_1 B_2 \alpha_1 \alpha_2) = -1, & (\Gamma_1 \Gamma_2 \alpha_2 \alpha_3) = -1, \\
(A_3 A_4 \alpha_1 \alpha_3) = -1, & (B_3 B_4 \alpha_3 \alpha_4) = -1, & (\Gamma_3 \Gamma_4 \alpha_1 \alpha_4) = -1, \\
(A_1 A_3 \beta_2 \beta_4) = -1, & (B_1 B_3 \beta_1 \beta_2) = -1, & (\Gamma_1 \Gamma_3 \beta_2 \beta_3) = -1, \\
(A_2 A_4 \beta_1 \beta_3) = -1, & (B_2 B_4 \beta_3 \beta_4) = -1, & (\Gamma_2 \Gamma_4 \beta_1 \beta_4) = -1, \\
(A_2 A_3 \gamma_2 \gamma_4) = -1, & (B_1 B_4 \gamma_1 \gamma_2) = -1, & (\Gamma_1 \Gamma_4 \gamma_2 \gamma_3) = -1, \\
(A_1 A_4 \gamma_1 \gamma_3) = -1, & (B_2 B_3 \gamma_3 \gamma_4) = -1, & (\Gamma_2 \Gamma_3 \gamma_1 \gamma_4) = -1.
\end{array}$$

Vermittelst dieser harmonischen Beziehungen ergiebt sich nun auch die kürzeste Construction der zweiten Gruppe von drei in desmischer Lage befindlichen Tetraedern mit den Seitenflächen:

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4, \quad \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4, \quad \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4,$$

wenn wir als gegeben die fünf Ebenen $A_1 A_2 A_3 A_4$ und B_1 annehmen; eine Construction, die dual gegenübersteht derjenigen, von welcher wir in (1.) zu dieser Gruppe von Tetraedern in desmischer Lage gelangten. Die Construction ist folgende: Man bestimme den Schnittpunkt der drei Ebenen $(B_1 A_1 A_2) = \mathfrak{a}_3$ und verbinde ihn mit der Schnittlinie der beiden Ebenen $|A_3 A_4| \equiv |\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2| \equiv |\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_4|$ durch eine Ebene $[\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4]$, welche nichts anderes ist, als die Ebene α_1; auf diese Weise finden wir zunächst die sechs Ebenen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= [(B_1 A_1 A_2),\ |A_3 A_4|], \\
\alpha_2 &= [(B_1 A_3 A_4),\ |A_1 A_2|], \\
\beta_1 &= [(B_1 A_1 A_3),\ |A_2 A_4|], \\
\beta_2 &= [(B_1 A_2 A_4),\ |A_1 A_3|], \\
\gamma_1 &= [(B_1 A_2 A_3),\ |A_1 A_4|], \\
\gamma_2 &= [(B_1 A_1 A_4),\ |A_2 A_3|].
\end{aligned}$$

und zu diesen 6 Ebenen treten durch die harmonischen Beziehungen:

$$(A_3 A_4 \alpha_1 \alpha_3) = -1,$$
$$(A_1 A_2 \alpha_2 \alpha_4) = -1,$$
$$(A_2 A_4 \beta_1 \beta_3) = -1,$$
$$(A_1 A_3 \beta_2 \beta_4) = -1,$$
$$(A_1 A_4 \gamma_1 \gamma_3) = -1,$$
$$(A_2 A_3 \gamma_2 \gamma_4) = -1,$$

die sechs übrigen Ebenen $\alpha_3 \alpha_4 \beta_3 \beta_4 \gamma_3 \gamma_4$ als construirbar hinzu, so dass wir die 12 Seitenflächen der drei in desmischer Lage befindlichen Tetraeder erhalten:

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4, \quad \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4, \quad \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4.$$

Breslau, im November 1891.

Heinrich Schröter.

Die Jahreswende von 1891 zu 1892 ist für die deutsche Mathematik verhängnissvoll gewesen; kaum war die Kunde von dem nach kurzer Krankheit erfolgten Tode *Kroneckers* erklungen, als ihr die Nachricht folgte, dass am 3. Januar des neuen Jahres auch *Schröter,* nach längerer Krankheit, dahingeschieden sei. Seit dem September 1890, wo er von einer Lähmung betroffen wurde, war er leidend, aber doch noch bis zum Herbste des vergangenen Jahres geistig frisch und wissenschaftlich thätig.

Am 8. Januar 1829 in Königsberg geboren, ist er kurz vor vollendetem 63. Lebensjahre gestorben, frühzeitiger, als man bei ihm, dem eifrigen Turner, hätte erwarten sollen.

In Königsberg und Berlin hat er studirt; dort waren *Franz Neumann, Richelot* und *Hesse,* hier *Dirichlet, Steiner, Borchardt* und *Eisenstein* seine Lehrer.

Im Jahre 1854 promovirte er an der heimathlichen Universität mit einer Dissertation über Modulargleichungen; seit 1855 gehörte er der Breslauer Universität an, vom Herbste 1861 ab als ordentlicher Professor.

Auch seine Habilitationsschrift gehört der Theorie der elliptischen Functionen an, und er ist auch später noch einige Male zu diesem Gegenstande seiner ersten Beschäftigung zurückgekehrt.

Diese ersten Arbeiten *Schröters* behandelten Probleme, die damals zu den schwierigsten gehörten, und die in ihnen enthaltenen Ergebnisse sind heute noch anerkannt und werthvoll.

Jedoch der Einfluss, welchen *Steiners* Vorlesungen und der persönliche Verkehr, durch den ihn der grosse Geometer auszeichnete, auf ihn ausgeübt haben, war mächtiger und machte sich bald geltend. Als Schüler *Steiners* trat er mit seinen beiden ersten Arbeiten in diesem Journale (Bd. 54 und 56) hervor, von denen die zweite über die Raumcurven dritter Ordnung und dritter Klasse für die Theorie dieser Curven grundlegend geworden ist.

Schröter wurde der treueste Schüler *Steiners* und bald der namhafteste Vertreter der *Steiner*schen Richtung. Ihm ist es gelungen, die Gefahr, in den Hintergrund gedrängt zu werden, von der synthetischen Geometrie abzuwenden und sie zu grösserer Anerkennung emporzuheben. An seiner Hochschule schuf er eine Stätte, wo sie — längere Zeit fast allein in Deutschland — eifrig gepflegt wurde; durch seine Schriften gewann er auch ausserhalb seines engeren Wirkungskreises der synthetischen Behandlungsweise geometrischer Probleme Freunde.

Aus *Steiners* Nachlass übernahm er es, den Theil der Theorie der Kegelschnitte, in welchem deren projective Eigenschaften zu Grunde gelegt werden, zu ordnen und mit der eigenen Nachschrift *Steiner*scher Vorlesungen zu verweben. Die daraus hervorgegangenen *Steiner-Schröter*schen Vorlesungen über synthetische Geometrie — denn so werden sie mit Recht genannt — haben, seit ihrem Erscheinen in erster Auflage vor 25 Jahren, neben *Reyes* die *Staudt*sche Richtung vertretendem Buche, wohl allen, welche sich mit der rein geometrischen Theorie der Kegelschnitte vertraut machen wollten, zur Einführung gedient.

Steiner selbst war in der „Systematischen Entwickelung“, dem einzigen erschienenen von fünf beabsichtigten Theilen, über die Kegelschnitte und die geradlinigen Flächen zweiten Grades nicht hinausgekommen; *Schröter* hat den *Steiner*schen Plan in drei weiteren selbständigen Werken ausgeführt, von denen die beiden letzten die ebenen Curven dritter Ordnung und die Raumcurven vierter Ordnung erster Art behandeln; während das erste, umfangreichste und hervorragendste (1880 erschienene) Werk die Oberflächen zweiter Ordnung und die Raumcurven dritter Ordnung zum Gegenstande seiner methodisch mustergiltigen Darstellung hat. Ausgedehnte Abschnitte der Theorie dieser Flächen und Curven haben hier zum ersten Male ihre synthetische Behandlung gefunden; insbesondere möchte ich als *Schröters* geistiges Eigenthum die Ableitung vieler metrischer Eigenschaften der Flächen zweiten Grades hervorheben.

In Anerkennung der Bedeutung dieses Buches hat ihn die Berliner Akademie der Wissenschaften bald nach dem Erscheinen desselben zu ihrem Correspondenten ernannt.

Ausserdem hat *Schröter* eine Reihe von Abhandlungen veröffentlicht, fast alle der reinen Geometrie gewidmet, alle durch klare und durchsichtige Darstellung sich auszeichnend. Diese Klarheit der Darstellung ist es, welche

die *Schröter*schen Arbeiten von der Mehrzahl der heutigen mathematischen Veröffentlichungen, die nach *Lagranges* Muster sich auf das absolut Nothwendige beschränken, nach meinem Gefühle in angenehmer Weise unterscheidet; ihnen ist, um mit *Hankel* zu reden, noch die *Euler*sche Behaglichkeit eigen; gerade deshalb aber werden sie, glaube ich, auch einer späteren Zeit, der unsere jetzigen Untersuchungen und Ziele ferner liegen, noch verständlich sein.

Schröter kam es weniger darauf an, eine Wahrheit erkannt und irgend wie begründet zu haben; ihn trieb es, die natürlichsten Beweismomente zu finden; wenn er sich wiederholt elementare Probleme gewählt hat, so geschah es, um ihnen die einfachste Darstellung abzugewinnen; so auch in der vorangehenden Abhandlung, mit der er Abschied von uns genommen hat.

Alle, denen er seine nie wankende Freundschaft geschenkt und stets bereitwillig mit seinem Rathe beigestanden hat, werden, mit schwerem Herzen den herben Verlust tragend, dankbar die Erinnerung an ihn und seine Treue bewahren.

R. Sturm.

I. Simon, Die Trigonometrie in der absoluten Geometrie.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. I.

Fig. III.

Fig. II.

Fi